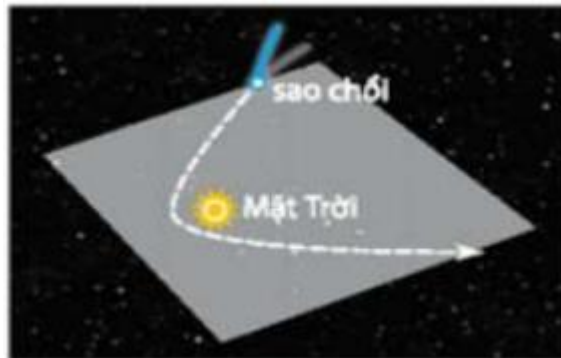


PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG

DẠNG 4: HYPEBOL

Câu 1: Một sao chổi đi qua hệ mặt trời theo quỹ đạo là một nhánh hypebol nhận tâm mặt trời là một tiêu điểm, khoảng cách gần nhất từ sao chổi này đến tâm Mặt Trời là $3.10^8 km$ và tâm sai của quỹ đạo hypebol là 3,6. Hãy lập phương trình chính tắc của hypebol chứa quỹ đạo, với 1 đơn vị đo trên mặt phẳng tọa độ tương ứng với $10^8 km$ trên thực tế.

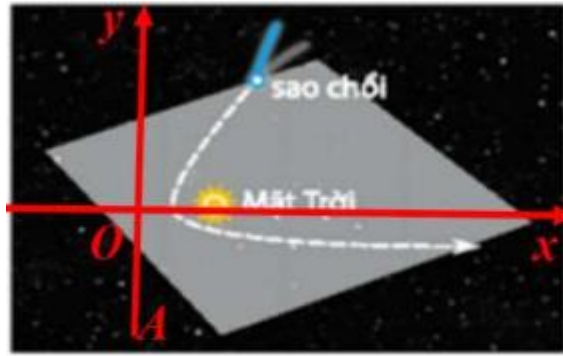


Sao chổi rất quan trọng đối với các nhà khoa học vì chúng là những thiên thể nguyên thủy còn sót lại từ quá trình hình thành hệ mặt trời. Đối với những sao chổi có quỹ đạo là hypebol hay parabol chúng ta chỉ thấy chúng một lần, sau đó chúng đi khỏi hệ mặt trời và không bao giờ quay trở lại. Dựa vào các định luật của Newton về chuyển động người ta có thể rút ra quỹ đạo chuyển động của sao chổi quanh mặt trời là đường elip, Hypebol hay parabol tùy thuộc vào vận tốc chuyển động của nó.



Hình ảnh: Sao chổi Halley có chu kì khoảng 75-76 năm, quan sát được từ Trái Đất

Lời giải



Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , với 1 đơn vị đo trong mặt phẳng tọa độ tương ứng với $10^8 km$ trên thực tế.

Gọi phương trình chính tắc của hypebol $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a, b > 0$.

Khi sao chổi di chuyển trên đỉnh của hypebol thì khoảng cách giữa sao chổi và tâm Mặt Trời là gần nhất là $3 \cdot 10^8 km$, từ đó $c - a = 3$.

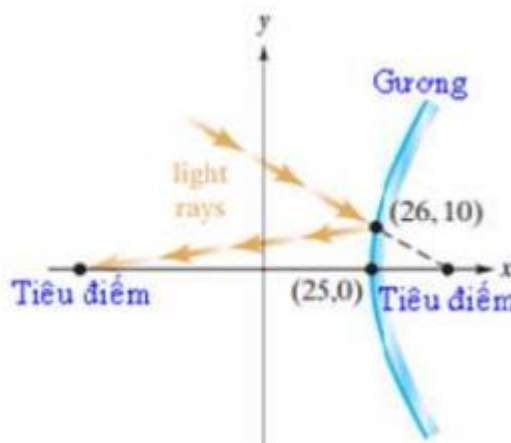
Mặt khác, tâm sai của quỹ đạo hypebol là 3,6 nên $e = \frac{c}{a} = 3,6 \Leftrightarrow c = 3,6a$.

Khi đó ta tìm được $a = \frac{15}{13}$; $c = \frac{54}{13}$.

Từ hệ thức $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = \left(\frac{54}{13}\right)^2 - \left(\frac{15}{13}\right)^2 = \frac{207}{13}$.

Vậy phương trình chính tắc của hypebol $\frac{169x^2}{255} - \frac{13y^2}{207} = 1$.

Câu 2: Viết phương trình chính tắc mô tả của bề mặt gương hypebol được mô tả ở hình vẽ sau đây:



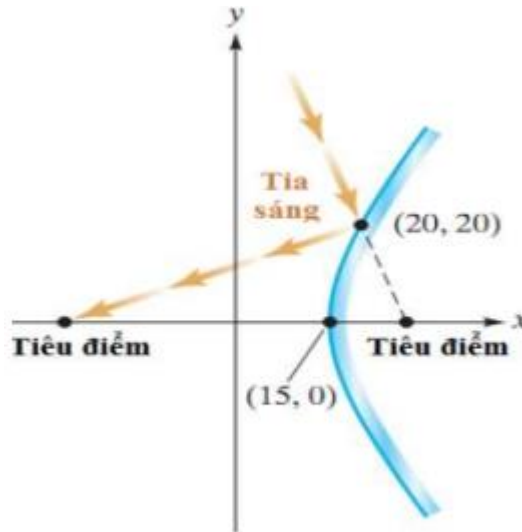
Lời giải

Từ hình vẽ ta thấy khoảng cách từ tâm tới đỉnh của hypebol bằng 25, tức $a = 25$ và đỉnh của hypebol có tọa độ $(26;10)$ nằm trên hypebol đó.

Thay $a = 25, x = 26, y = 10$ vào phương trình $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ta được $\frac{26^2}{25^2} - \frac{10^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 \approx 122,55$.

Vậy phương trình hypebol là $\frac{x^2}{625} - \frac{y^2}{122,55} = 1$.

Câu 3: Gương hypebol được sử dụng trong một số kính viễn vọng. Các gương như thế có tính chất là tia sáng hướng tới một tiêu điểm của gương sẽ được phản xạ với tiêu điểm kia. Dựa vào hình vẽ bên hãy viết phương trình mô phỏng bề mặt gương hypebol.

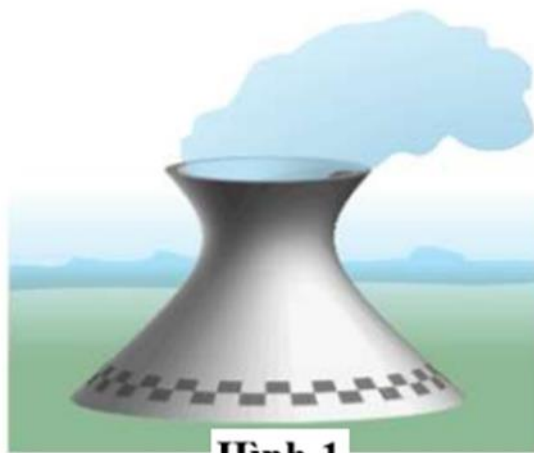


Lời giải

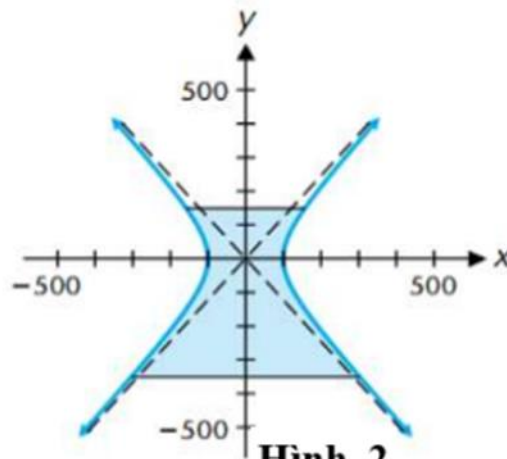
Đỉnh hypebol là một tiêu điểm trên trục Ox và tâm của hypebol ở gốc tọa độ. Do đó hoành độ của điểm chắn trên trục Ox là $a = 15$. Từ hình vẽ ta thấy điểm có tọa độ $(20; 20)$ nằm trên hypebol nên có thể xác định b bằng cách thay $a = 15, x = 20, y = 20$ vào phương trình hypebol $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ta được $\frac{20^2}{15^2} - \frac{20^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = \frac{3600}{7}$.
Ta giới hạn nhánh phải hay điều kiện $x \geq 15$.

Vậy bề mặt gương có thể mô tả bởi phương trình hypebol $\frac{x^2}{225} - \frac{7y^2}{3600} = 1$ với $x \geq 15$.

Câu 4: Một tháp cao làm mát của nhà máy hạt nhân dạng hypebol tròn xoay, tức là một hypebol xoay tròn quanh trục ảo của nó. Phương trình hypebol được dùng để tạo ra hypeboloid là $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{150} = 1$. Nếu tháp có chiều cao $500m$, đỉnh tháp cao $150m$ tính từ tâm của hypebol và đáy tháp cao $350m$ dưới tâm của hypebol thì bán kính của đỉnh tháp và đáy tháp bằng bao nhiêu? Bán kính của mặt cắt ngang hình tròn nhỏ nhất trong tháp là bao nhiêu?



Hình 1



Hình 2

Lời giải

Điểm thuộc hyperbol ở trên đỉnh có tọa độ $(x; 150)$.

Thay $y = 150$ vào phương trình của vỏ tháp, ta được

$$\frac{x^2}{100} - \frac{150^2}{150} = 1 \Rightarrow x^2 = 20000 \Rightarrow x = 100\sqrt{2} \approx 141,421.$$

Vậy bán kính của đỉnh tháp bằng $141,421m$.

Điểm thuộc hyperbol ở trên đỉnh có tọa độ $(x; -350)$.

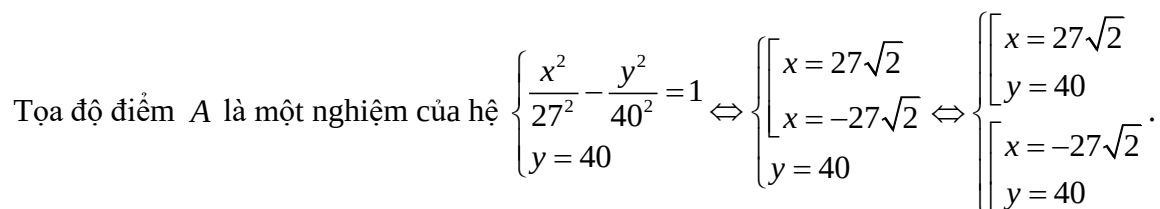
Thay $y = -350$ vào phương trình của vỏ tháp, ta được

$$\frac{x^2}{100} - \frac{350^2}{150} = 1 \Rightarrow x^2 = 64444,444 \Rightarrow x \approx 253,859.$$

Vậy bán kính của đáy tháp bằng $253,859m$. Bán kính nhỏ nhất của tháp $a = 10m$.

Câu 5: Một tháp làm nguội của một nhà máy có mặt cắt là một hình hyperbol có phương trình $\frac{x^2}{27^2} - \frac{y^2}{40^2} = 1$. Cho biết chiều cao của tháp là $120m$ và khoảng cách từ nóc tháp đến tâm đối xứng của hyperbol bằng một nửa khoảng cách từ tâm đối xứng đến đáy. Tính bán kính đường tròn nóc và bán kính đường tròn đáy của tháp đã cho.





Bán kính của đường tròn ở nóc tháp là $r = 27\sqrt{2}\text{m}$.

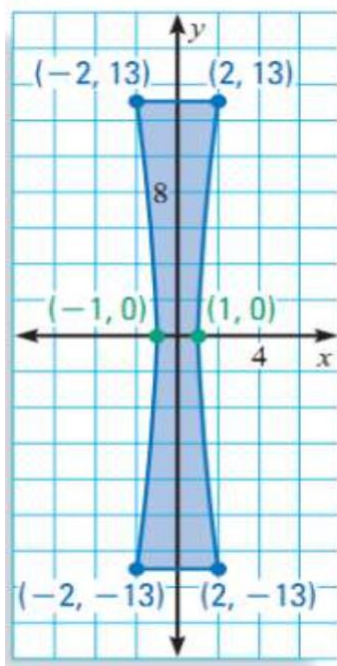
Tọa độ điểm B là một nghiệm của hệ $\begin{cases} \frac{x^2}{27^2} - \frac{y^2}{40^2} = 1 \\ y = -80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 27\sqrt{5} \\ x = -27\sqrt{5} \\ y = -80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 27\sqrt{5} \\ y = -80 \\ x = -27\sqrt{5} \\ y = -80 \end{cases}.$

Tìm được $B(-27\sqrt{5}; -80)$. Vậy bán kính của đường tròn ở đáy của tháp là $R = 27\sqrt{5}\text{m}$.

- a) Tìm độ dài trục thực của hypebol
b) Viết phương trình chính tắc của hypebol

Lời giải

a) Ta có $AA_1 = 100\text{cm}$. Đơn vị trên trục tọa độ là 10 cm. Độ dài của trục thực là $2a = 10$.



- Viết phương trình mô tả hai đường cong biên của bức tượng.
- Ở độ cao 16 feet thì chiều rộng của bức tường bằng bao nhiêu?

Lời giải

- Từ hình vẽ ta thấy trục thực là trục nằm ngang và có $a=1$. Do đó phương trình của Hypebol có dạng $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Vì hyperbol đi qua điểm $(2;3)$ nên thay $x=2; y=3$ vào phương trình trên ta được

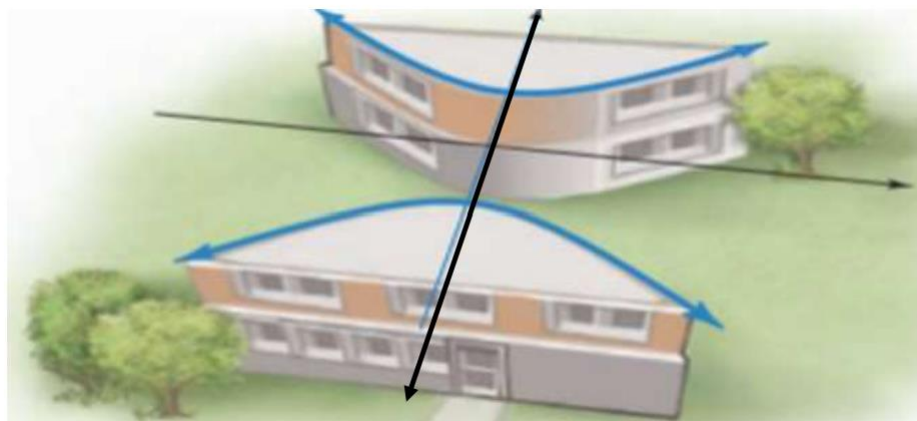
$$\frac{2^2}{1} - \frac{3^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b \approx 7,5.$$

Vậy hình vẽ trên có thể mô tả bởi phương trình hypebol $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{225} = 1$.

- Ở độ cao 16 feet kể từ mặt đất ứng với điểm có tung độ bằng 8 trên mặt phẳng tọa độ. Để tìm chiều rộng của bức tượng, ta thế $y=8$ vào phương trình và tìm được $x \approx 1,46$.

Kết luận: Vậy ở độ cao 16 feet thì bức tượng rộng xấp xỉ bằng 5,84 feet.

- Câu 9:** Một kiến trúc sư thiết kế hai tòa nhà có hình dạng và vị trí giống như một phần của hai nhánh hyperbol có phương trình $\frac{x^2}{400} - \frac{y^2}{625} = 1$ trong đó x và y đo theo đơn vị mét. Hỏi điểm gần nhất của hai tòa nhà cách nhau bao xa?



Lời giải

Từ phương trình của hyperbol cho ta thấy $a^2 = 400$, do đó $a = 20$. Khoảng cách gần nhất giữa hai tòa nhà bằng khoảng cách giữa hai đỉnh của hyperbol và bằng $2a = 400m$

Câu 10: Gương Một của hệ thống định vị từ xa có thể giúp hoa tiêu điều khiển kinh khí cầu bằng cách duy trì hiệu số không đổi giữa các khoảng cách từ kinh khí cầu tới hai điểm cố định trên mặt đất: trạm chủ và trạm vệ tinh. Hãy viết phương trình của hyperbol.

Hướng dẫn

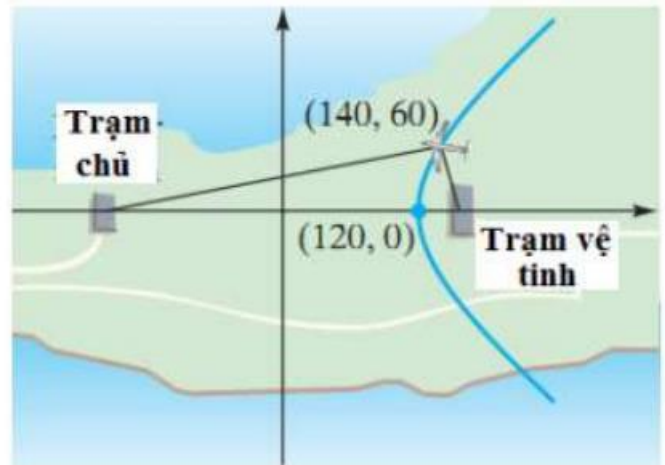
Đỉnh của hyperbol với tâm tại gốc tọa độ là một điểm trên trục Ox . Từ hình vẽ ta thấy hoành độ của điểm này là $a = 120$. Thay $a = 120$, $x = 140$, $y = 60$ vào phương trình của hyperbol

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\text{ta được } \frac{140^2}{120^2} - \frac{60^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = \frac{129600}{13}$$

Ta giới hạn hyperbol ở nhánh phải với điều kiện $x \geq 120$.

Vậy hình vẽ có thể mô tả bởi phương trình hyperbol $\frac{x^2}{14400} - \frac{13y^2}{129600} = 1$ với $x \geq 120$.



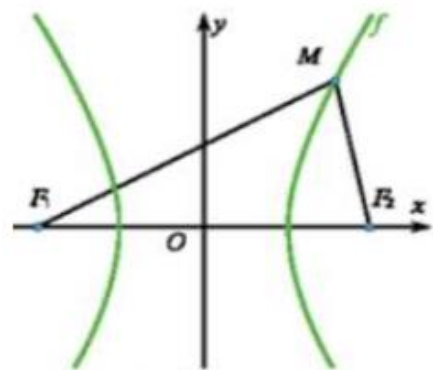
Câu 11: Hai trạm thông tin lần lượt đặt tại F_1 và F_2 cách nhau 4 km. Trong khu vực xảy ra một vụ nổ và micro đặt tại trạm F_1 ghi nhận được tiếng nổ chậm hơn 6 giây so với micro đặt tại trạm F_2 . Chứng tỏ rằng vị trí vụ nổ nằm trên một đường hyperbol với F_1 và F_2 là hai tiêu điểm và hãy viết phương trình chính tắc của hyperbol này. Cho biết tốc độ âm thanh lan truyền trong không khí là 343 m/s.

Lời giải

Gọi M là vị trí xảy ra vụ nổ, ta có hiệu khoảng cách từ M đến F_1 và F_2 là $MF_1 - MF_2 = 343.6 = 2058m$. Hiệu khoảng cách này là số không đổi nên vị trí vụ nổ nằm trên một đường cong hyperbol (H) với F_1 và F_2 là hai tiêu điểm. Ta có tiêu cự $F_1F_2 = 2c = 4000m$ và $2a = 2058m$ nên ta tìm được $c = 2000m$ và $a = 1029m$. Do đó $a^2 = 1029^2 = 1058841$ và $b^2 = c^2 - a^2 = 2000^2 - 1029^2 = 2941159$.

Kết luận: Vậy phương trình chính tắc của hyperbol là

$$\frac{x^2}{1058841} - \frac{y^2}{2941159} = 1.$$



Câu 12: Hai micro cách nhau 1 dặm Anh ghi lại một vụ nổ. Micro A nhận được âm thanh trước 2 giây so với micro B. Vậy vụ nổ đã xảy ra ở đâu?



Theo hệ thức trong hyperbol ta có $b^2 = c^2 - a^2 = 2640^2 - 1100^2 = 5759600$. Từ đó ta kết luận vụ nổ xảy ra trên nhánh phải của hyperbol: $\frac{x^2}{1210000} - \frac{y^2}{5759600} = 1$ với $x \geq 1100$.

Viết phương trình chính tắc của hyperbol đó theo đơn vị kilômét.

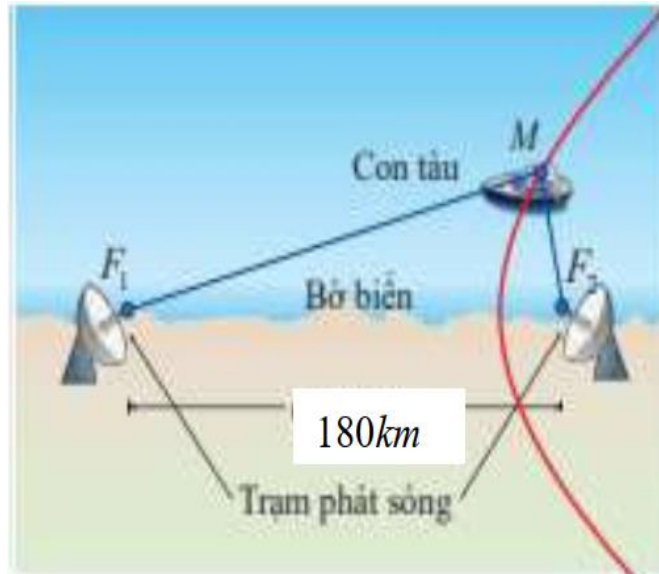
Lời giải

Khi đó $b^2 = c^2 - a^2 = 22500 - 5329 = 17171$.

Phương trình chính tắc của quỹ đạo hyperbol (H) của con tàu là $\frac{x^2}{5329} - \frac{y^2}{17171} = 1$.

Câu 14: Một con tàu đi theo tuyến đường giao thông trên biển. Tuyến đường này song song với một bờ biển thẳng và cách bờ $50km$. Trên bờ biển có đặt hai trạm truyền thông tin tại vị trí F_1 và F_2 .

cách nhau $180km$ và phát đi các tín hiệu vô tuyến cùng thời điểm với nhau. Dựa vào sự chênh lệch thời gian giữa các tín hiệu vô tuyến từ hai trạm, hoa tiêu của tàu xác định được vị trí của tàu hiện đang ở khu vực giữa hai trạm và khoảng cách đến F_2 gần hơn F_1 là $40km$. Tính khoảng cách từ tàu đến mỗi trạm truyền thông tin. Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.



Lời giải

Phương trình chính tắc của quỹ đạo hyperbol (H) của con tàu là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > 0, b > 0$.

Gọi vị trí của con tàu là điểm M . Hiệu các khoảng cách từ con tàu đến các trạm phát sóng F_1 và F_2 là $d = |MF_1 - MF_2| = 40 \Rightarrow 2a = 40 \Rightarrow a = 20 \Rightarrow a^2 = 400$.

Khoảng cách giữa hai trạm vô tuyến là $F_1F_2 = 180km \Rightarrow 2c = 180 \Rightarrow c = 90 \Rightarrow c^2 = 8100$

Khi đó $b^2 = c^2 - a^2 = 8100 - 400 = 7700$. Phương trình của (H) là: $\frac{x^2}{400} - \frac{y^2}{7700} = 1$

Mặt khác tuyến đường giao thông mà con tàu đi trên biển song song với một bờ biển thẳng và cách bờ $50km$ nên con tàu trên chạy trên một đường thẳng $\Delta: y = 50$.

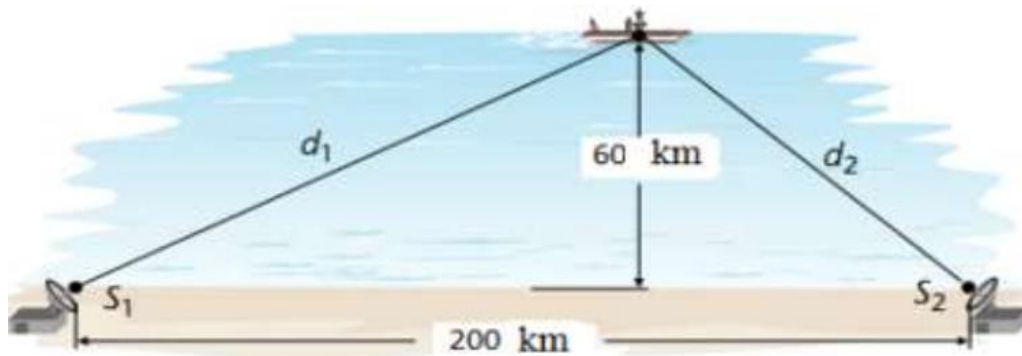
Toạ độ M của con tàu là nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{x^2}{400} - \frac{y^2}{7700} = 1 \\ y = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \approx 23 \\ y = 50 \end{cases}$$

Ta có $M(23; 50), F_1(-90; 0), F_2(90; 0) \Rightarrow MF_1 \approx 123,57km$ và $MF_2 \approx 83,6km$.

Vậy khoảng cách từ tàu đến mỗi trạm truyền thông tin lần lượt là $123,57km$ và $83,6km$

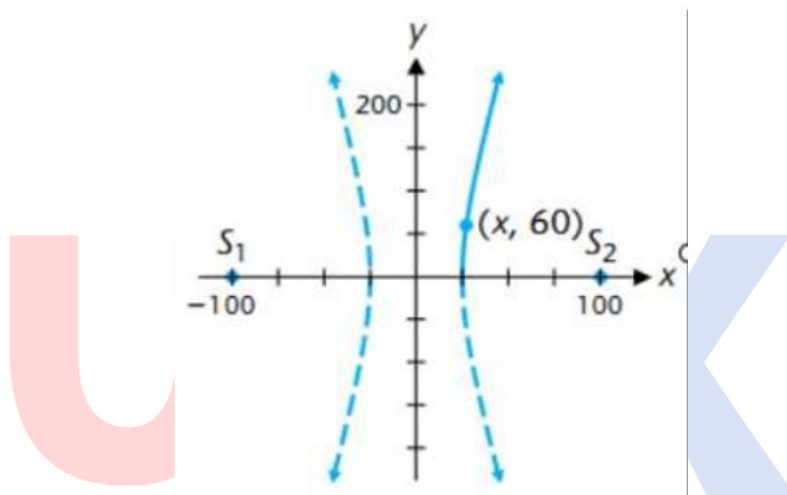
Câu 15: Một con tàu đang trên hành trình đi song song với bờ biển thẳng và cách bờ $60km$.

Hai trạm truyền thông tin S_1 và S_2 nằm trên bờ biển, cách xa nhau $200km$. Bằng cách tính giờ các tín hiệu vô tuyến từ hai trạm, hoa tiêu của tàu xác định rằng con tàu đang ở giữa hai trạm và ở gần S_2 hơn S_1 là $50km$. Tìm khoảng cách từ con tàu tới mỗi trạm.



Lời giải

Gọi d_1 và d_2 là các khoảng cách tương ứng từ con tàu đến các vị trí S_1 và S_2 . Khi đó hiệu $d_1 - d_2 = 50$ và con thuyền phải nằm trên phải nằm trên một hyperbol với hai tiêu điểm S_1 và S_2 , hiệu hai khoảng cách cố định bằng 50. Để thiết lập phương trình của hyperbol ta biểu diễn hiệu cố định này bằng $2a$.



Với hyperbol trong hình vẽ, ta có:

$$2a = 50 \Rightarrow a = 25, c = 100 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 100^2 - 25^2 = 9375 \Rightarrow b = \sqrt{9375}.$$

Vậy phương trình hyperbol là $\frac{x^2}{625} - \frac{y^2}{9375} = 1$.

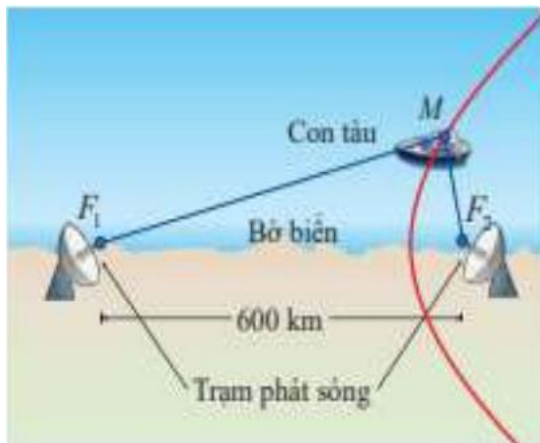
Thay $y = 60$ vào phương trình và giải theo x , ta được $\frac{x^2}{625} - \frac{60^2}{9375} = 1 \Rightarrow x^2 = 685$.

Do đó $x = \sqrt{685} \approx 29,41 \text{ km}$.

Khoảng cách từ con tàu đến S_1 là $d_1 = \sqrt{(29,41 + 100)^2 + 60^2} = \sqrt{20346,9841} \approx 142,6 \text{ (km)}$.

Khoảng cách từ con tàu đến S_2 là $d_2 = \sqrt{(29,41 - 100)^2 + 60^2} = \sqrt{8582,9841} \approx 92,6 \text{ (km)}$.

Câu 16: Nhờ việc thu tín hiệu từ hai trạm phát sóng F_1 và F_2 trên bờ, hệ thống định vị đặt tại điểm M trên con tàu tính được hiệu số khoảng cách từ đến F_1 và F_2 và xác định được một hyperbol đi qua điểm M . Biết khoảng cách giữa hai trạm vô tuyến là 600 km , vận tốc sóng vô tuyến là 300000 km/s và thời gian con tàu nhận được tín hiệu từ hai trạm trên bờ luôn cách nhau $0,0012 \text{ s}$. Viết phương trình chính tắc của quỹ đạo hyperbol của con tàu.



Lời giải

Phương trình chính tắc của quỹ đạo hyperbol của con tàu là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0; b > 0$).

Hiệu các khoảng cách từ con tàu đến các trạm phát sóng F_1 và F_2 là

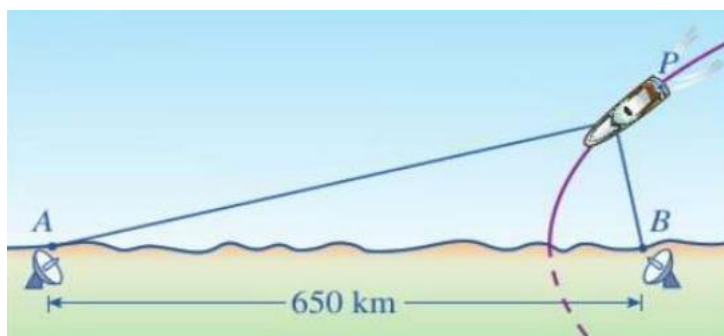
$$d = |MF_1 - MF_2| = 0,0012.300000 = 360 \Rightarrow 2a = 360 \Rightarrow a = 180 \Rightarrow a^2 = 32400.$$

Khoảng cách giữa hai trạm vô tuyến là $F_1F_2 = 600km \Rightarrow 2c = 600 \Rightarrow c = 300 \Rightarrow c^2 = 90000$.

Khi đó $b^2 = a^2 - c^2 = 57600 \Rightarrow b = 240$.

Phương trình chính tắc của quỹ đạo hyperbol của con tàu là $\frac{x^2}{32400} - \frac{y^2}{57600} = 1$.

Câu 17: Đọc theo bờ biển, người ta thiết lập hệ thống định vị vô tuyến dẫn đường tầm xa để truyền tín hiệu cho máy bay hoặc tàu thủy hoạt động trên biển. Trong hệ thống đó có hai đài vô tuyến đặt lần lượt tại địa điểm A và địa điểm B , khoảng cách $AB = 650km$. Giả sử có một con tàu chuyển động trên biển với quỹ đạo là hyperbol nhận A và B là hai tiêu điểm. Khi đang ở vị trí P , máy thu tín hiệu trên con tàu chuyển đổi chênh lệch thời gian nhận các tín hiệu thành hiệu khoảng cách $|PA - PB|$. Giả sử thời gian con tàu nhận được tín hiệu từ B trước khi nhận được tín hiệu từ A là $0,0012s$. Vận tốc di chuyển của tín hiệu là $3.10^8 m/s$.



- a.** Lập phương trình hyperbol mô tả quỹ đạo chuyển động của con tàu.
b. Chứng tỏ rằng tại mỗi thời điểm trên quỹ đạo chuyển động thì thời gian con tàu nhận được tín hiệu từ B trước khi nhận được tín hiệu từ A luôn là $0,0012s$.

Lời giải

a. Phương trình chính tắc của quỹ đạo hyperbol của con tàu là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > 0; b > 0)$.

Hiệu các khoảng cách từ con tàu đến các trạm phát sóng A và B là $d = |PA - PB| = 0,0012 \cdot 3 \cdot 10^5 = 360 \Rightarrow 2a = 360 \Rightarrow a = 180 \Rightarrow a^2 = 32400$.

Khi đó $b^2 = a^2 - c^2 = 105625 - 32400 = 73225$.

b. Vì con tàu chỉ chuyển động ở nhánh bên phải trục Oy của hyperbol nên ta có $PB < PA$ với mọi vị trí của P . Do đó tàu luôn nhận được tín hiệu từ B trước khi nhận được tín hiệu từ A . Gọi t_1 là thời gian để tàu nhận được tín hiệu từ A , t_2 là thời gian nhận được tín hiệu từ B thì

B trước khi nhận được tín hiệu từ địa điểm A luôn là $0,0012s$.

a. Giả sử rằng các tín hiệu vô tuyến truyền đi với vận tốc 300 m/micro giây hãy xác định phương trình của hyperbol mà con tàu nằm trên đó.

b. Nếu con tàu nằm về phía bắc của tháp thì tàu cách bờ biển bao xa?

Lời giải

a. Theo đề bài con tàu nhận được tín hiệu từ B sớm hơn từ A là 500 micro giây, vì âm thanh di chuyển với tốc độ $300m/\text{micro giây}$ nên hiệu số khoảng cách từ con tàu A và B là $500.300m = 150000m$. Hiệu khoảng cách này là $2a = 150$ nên $a = 75$.

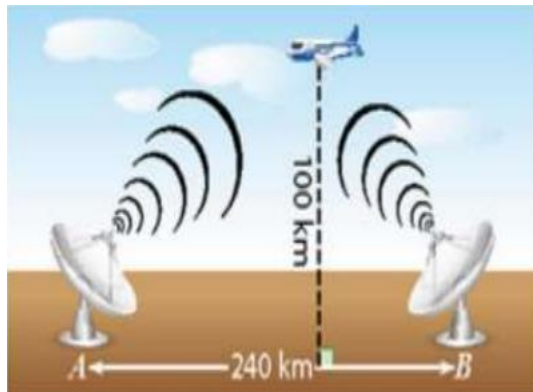
Con tàu nằm trên một nhánh của hyperbol, với hai tháp vô tuyến A và B là hai tiêu điểm, A và B cách nhau $200km$, nghĩa là $2c = 200$. Từ đó $c = 100$.

Theo tính chất hyperbol, ta có $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = 100^2 - 75^2 = 4375$.

Kết luận: Vậy phương trình của hyperbol cần tìm là: $\frac{x^2}{5625} - \frac{y^2}{4375} = 1$.

b. Con tàu nằm về phía bắc của tháp B nghĩa là có hoành độ $x=c=100$. Thay $x=100$ vào phương trình trên ta được $y \approx 56,333m$.

Câu 19: Hai trạm phát sóng vô tuyến A và B đặt cách nhau 240km . Tín hiệu sóng vô tuyến được truyền đi đồng thời từ hai trạm này với vận tốc bằng vận tốc ánh sáng là 300000km/s . Một máy bay đang bay theo phương ngang cách mặt đất 100km vừa vượt qua trạm B và đang tiến gần đến trạm A thì phi công ghi nhận được tín hiệu truyền từ cả hai trạm. Biết rằng tín hiệu truyền từ trạm B sớm hơn $0,45 \cdot 10^{-3}$ giây so với tín hiệu đến từ trạm A. Hãy tính khoảng cách từ máy bay đến mỗi trạm vào thời điểm nhận được tín hiệu.



Lời giải

Gọi vị trí máy bay tại thời điểm nhận được tín hiệu truyền từ cả hai trạm là M .

Theo giả thiết tín hiệu truyền từ trạm B sớm hơn $0,45 \cdot 10^{-3}$ giây so với tín hiệu đến từ trạm A , khi đó $MA - MB = 0,45 \cdot 10^{-3} \cdot 300000 = 135 \text{ km}$. Kí hiệu $2a = 135$, $2c = 240$.

Phương trình chính tắc của quỹ đạo hyperbol của máy bay là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0; b > 0$).

Theo tính chất hyperbol, ta có $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = 120^2 - 67,5^2 = 9843,75$.

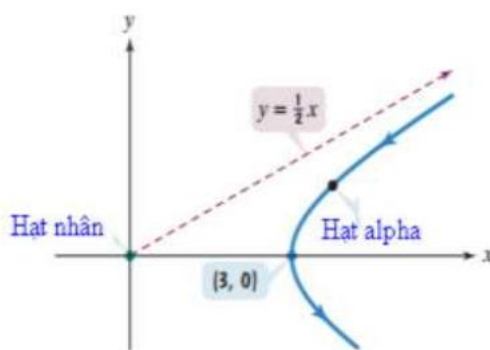
Phương trình chính tắc quỹ đạo của hyperbol của máy bay là: $\frac{x^2}{4556,25} - \frac{y^2}{9843,75} = 1$.

Khi máy bay đang bay theo phương ngang cách mặt đất 100 km thì máy bay ở vị trí điểm M có tung độ là 100 , suy ra hoành độ $x = \frac{45\sqrt{889}}{14}$. Khi đó máy bay đang ở vị trí điểm

$M\left(\frac{45\sqrt{889}}{14}; 100\right)$, hơn nữa trạm A ở vị trí $A(-120; 0)$ và trạm B ở vị trí $B(120; 0)$.

Vậy khoảng cách từ máy bay đến hai trạm A và B lần lượt là $MA \approx 238 \text{ km}$, $MB \approx 103 \text{ km}$.

Câu 20: Các thí nghiệm tán xạ, trong đó các hạt chuyển động bị lệch hướng bởi nhiều lực khác nhau, dẫn đến khái niệm về hạt nhân nguyên tử. Năm 1911 nhà vật lý Ernest Rutherford đã phát hiện ra rằng khi các hạt alpha hướng tới hạt nhân của nguyên tử vàng, chúng dần dần bị lệch hướng theo những đường hyperbol. Nếu một hạt tiến gần tới hạt nhân 3 đơn vị dọc theo hyperbol với đường tiệm cận là $y = \frac{x}{2}$ thì phương trình đường đi của nó là gì?



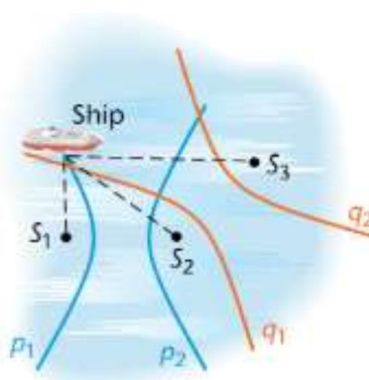
Lời giải

Với hyperbpl nằm ngang thì phương trình tiệm cận là $y = \pm \frac{b}{a} x$. Theo đề bài, ở đây phương trình

đường tiệm cận là $y = \frac{x}{2}$ nên ta có $\frac{b}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{a}{2}$. Từ hình vẽ cho thấy $a = 3 \Rightarrow b = 1,5$ và

phương trình đường đi của hạt là $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{2,25} = 1$, với $x \geq 3$.

Hình ảnh sau minh họa một dạng đơn giản của hệ thống quản lý các phương tiện đi lại, có tên gọi Loran, giống như hệ thống kiểm soát không lưu. Trên thực tế, ba trạm phát sóng được dùng để gửi tín hiệu đồng thời tới ba trạm tín hiệu. Máy tính trên tàu sẽ ghi lại các tín hiệu này và sử dụng chúng để xác định chênh lệch các khoảng cách từ tàu tới S_1 và S_2 , tới S_2 và S_3 .

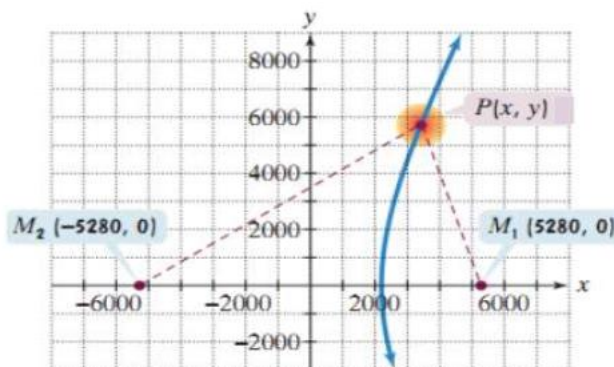


Về tất cả các điểm mà chênh lệch khoảng cách này không thay đổi, ta được hai nhánh của hypepol với tiêu điểm S_1 và S_2 đồng thời ta được hai nhánh của hypebol với tiêu điểm S_2 và S_3 . Dễ dàng chỉ ra được con tàu đang ở những nhánh nào, bằng cách so sánh tín hiệu từ mỗi trạm. Giao điểm của một nhánh từ mỗi hyperpol là vị trí của con tàu và máy tính biểu thị vị trí đó qua kinh độ và vĩ độ. Sau đây là một ví dụ tương tự, nhưng để xác định vị trí xảy ra vụ nổ.

Câu 21: Một vụ nổ được hai micro M_1 và M_2 đặt cách nhau 2 dặm ghi lại. Micro M_1 nhận được âm thanh trước 4 giây với micro M_2 . Giả sử âm thanh di chuyển với tốc độ 110 feet/ giây, xác định những vị trí có thể của vụ nổ, so với vị trí của các micro?

Lời giải

Ta bắt đầu bằng cách đặt micro trong một hệ tọa độ vuông góc. Bởi vì 1 dặm bằng 5280 feet nên ta đặt M_1 trên trục hoành cách gốc tọa độ 5280 feet về bên phải và đặt M_2 trên trục hoành cách gốc tọa độ 5280 feet về bên trái. Hình ảnh sau đây minh họa hai micro cách nhau 2 dặm. Ta biết rằng M_2 nhận được âm thanh sau 4 giây so với M_1 .



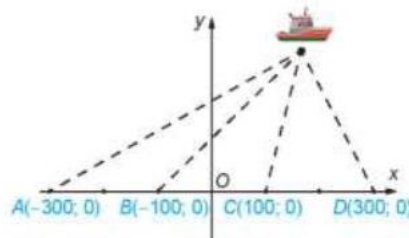
Vì âm thanh di chuyển với tốc độ 1100 feet/ giây nên hiệu số khoảng cách từ P tới M_2 và từ P đến M_1 là 4400 feet. Tất cả những điểm P thỏa mãn các điều kiện này là một hyperbol với hai

micro M_1 và M_2 là hai tiêu điểm. Như vậy, vị trí xảy ra vụ nổ nằm trên hyperbol có phương trình dạng: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \forall a > 0, b > 0$. Hiệu số khoảng cách giữa hai micro là 4400 feet và được đặt bằng $2a$. Tức là $2a = 4400 \Rightarrow a = 2200$. Khi đó hyperbol có phương trình dạng: $\frac{x^2}{2200^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Mặt khác khoảng cách từ gốc tọa độ O đến hai tiêu điểm $(-5280; 0)$ và $(5280; 0)$ đều bằng 5280. Do đó $c = 5280$. Sử dụng hệ thức $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = 5280^2 - 2200^2 = 23038400$.

Hyperbol với tiêu điểm là các micro có phương trình là $\frac{x^2}{4840000} - \frac{y^2}{23038400} = 1$.

Câu 22: Bốn trạm phát tín hiệu vô tuyến có vị trí A, B, C, D theo thứ tự đó thẳng hàng và cách đều với khoảng cách $200km$. Tại một thời điểm, bốn trạm cùng phát tín hiệu với vận tốc $292000km/s$. Một tàu thủy nhận được tín hiệu từ trạm C trước $0,0005s$ so với tín hiệu từ trạm B và nhận được tín hiệu từ trạm D sớm $0,001s$ so với tín hiệu từ trạm A .



- Tính hiệu các khoảng cách từ tàu đến các trạm B và C .
- Tính hiệu các khoảng cách từ tàu đến các trạm A và D .
- Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Hãy lập phương trình chính tắc của hai hyperbol đi qua vị trí điểm M của tàu. Từ đó, tính tọa độ của M .
- Tính khoảng cách từ tàu đến các trạm B, C .

Lời giải

Bốn trạm cùng phát tín hiệu với vận tốc $V = 292000km/s$. Gọi t_A, t_B, t_C, t_D lần lượt là thời gian để con tàu nhận được tín hiệu từ các trạm A, B, C, D và M là vị trí của tàu thủy. Khi đó

- Hiệu các khoảng cách từ tàu đến các trạm B và C là

$$d_1 = MB - MC = v \cdot t_B - v \cdot t_C = v(t_B - t_C) = 292000 \cdot 0,0005 = 146km.$$

- Hiệu các khoảng cách từ tàu đến các trạm A và D là

$$d_2 = MA - MD = v \cdot t_A - v \cdot t_D = v(t_A - t_D) = 292000 \cdot 0,001 = 292km.$$

- Phương trình chính tắc của quỹ đạo hyperbol (H_1) của con tàu đi qua M và nhận A và D là

tiêu điểm có dạng $\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} = 1$ với $a_1 > 0, b_1 > 0$.

Ta có $MA - MD = 292km \Rightarrow 2a_1 = 292 \Rightarrow a_1 = 146 \Rightarrow a^2 = 21316$ và

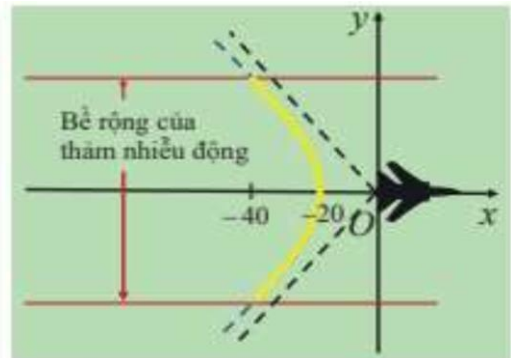
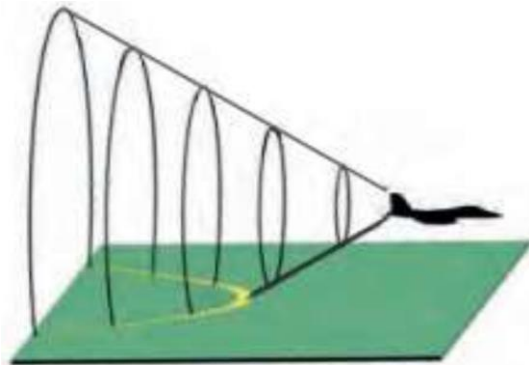
$$AD = 600km \Rightarrow 2c_1 = 600 \Rightarrow c_1 = 300. \text{ Khi đó } b_1^2 = c_1^2 - a_1^2 = 300^2 - 146^2 = 68684.$$

Phương trình (H_1) đi qua M và nhận A và D là tiêu điểm của (H_1) : $\frac{x^2}{21316} - \frac{y^2}{68684} = 1$.

động. Bề rộng của thảm này gấp khoảng 5 lần cao độ của máy bay. Tính độ cao của máy bay, biết bề rộng của thảm nhiễu động được đo cách phía sau máy bay một khoảng 40 mile và hypebol

(H) có phương trình $\frac{x^2}{400} - \frac{y^2}{100} = 1$.

Lời giải



Bề rộng của thảm nhiễu động được đo cách phía sau máy bay một khoảng 40 mile ứng với độ dài của đoạn thẳng AB. Dễ thấy điểm A có hoành độ bằng -40, mặt khác điểm A nằm trên

(H): $\frac{x^2}{400} - \frac{y^2}{100} = 1$ nên tìm được tung độ điểm A bằng $10\sqrt{3}$. Khi đó $AB = 20\sqrt{3}$.

Vậy bề rộng của thảm nhiễu động là $20\sqrt{3}$ dặm, mặt khác bề rộng của thảm nhiễu động gấp 5 lần chiều cao của máy bay là $4\sqrt{3}$ dặm hay $\approx 4\sqrt{3} \cdot 1,6 \text{ km} \approx 11,1 \text{ km}$.

Vậy tại thời điểm đo thảm nhiễu động máy bay bay cao khoảng 11,1km so với mặt đất.

Câu 25: Khi một máy bay bay nhanh hơn tốc độ âm thanh thì các sóng âm tạo ra một hình nón âm thanh phía sau máy bay. Nếu máy bay bay song song với mặt đất thì nón âm thanh cắt mặt đất theo một hình hypebol với máy bay ở ngay trên tâm của nó. Tiếng ầm vang nghe thấy dọc theo hypebol. Nếu ta nghe thấy tiếng ầm vang thì có nghĩa là ta đang ở trong vùng hypebol có phương trình:

$\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{4} = 1$, trong đó x và y đo theo dặm Anh. Khoảng cách theo chiều cắt ngang ngắn nhất từ máy bay tới nơi nghe thấy tiếng máy bay bằng bao nhiêu?

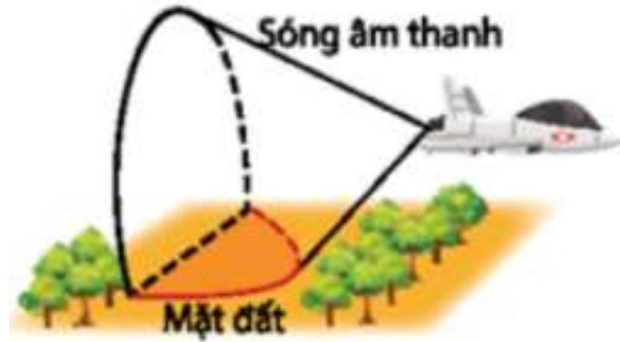


Lời giải

Từ phương trình của hypebol là $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{4} = 1$, ta có $a^2 = 100 \Rightarrow a = 10$.

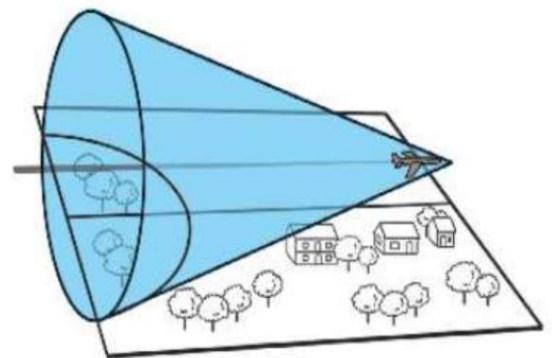
Theo đề bài, vì máy bay ở ngay trên tâm của hypebol nên khoảng cách ngắn nhất theo chiều ngang từ máy bay tới nơi nghe được tiếng của nó bằng 10 dặm.

Câu 26: Khi một máy bay bay nhanh hơn tốc độ âm thanh, nó tạo ra phía sau một mặt nón âm thanh áp suất cao. Nếu máy bay đang bay song song với mặt đất, mặt nón âm thanh này giao với mặt đất và những người ở trên đường giao này sẽ nghe thấy tiếng nổ siêu thanh.



- a. Giải thích vì sao những vị trí có thể nghe thấy tiếng nổ siêu thanh trên mặt đất đều nằm trên một đường hypebol.
- b. Biết hypebol này có tâm sai $e = 1,02$ và tiêu cự bằng 33km , hãy viết phương trình chính tắc của hypebol.

Lời giải



- a. Những người đều nghe thấy tiếng nổ cùng một thời điểm chứng tỏ những người này đều thuộc vùng hình nón. Hơn nữa những người đó đều đứng trên mặt đất chứng tỏ người này thuộc vùng giao tuyến giữa hình nón và mặt phẳng. Theo giả thiết máy bay song song với mặt đất suy ra mặt phẳng song song với trục của hình nón, khi đó giao tuyến của mặt đất và hình nón là một hypebol. Vậy vị trí của họ cùng thuộc một đường hypebol.
- b. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, với 1 đơn vị đo trong mặt phẳng tọa độ tương ứng với 1km trên thực tế. Phương trình chính tắc của hypebol (P) là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, với $a, b > 0$.

Theo giả thiết hypebol này có tâm sai $e = 1,02$ và tiêu cự bằng 33km nên ta có hệ

$$\begin{cases} \frac{c}{a} = 1,02 \\ 2c = 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{275}{17} \\ b = \frac{33}{2} \end{cases} \text{ Mặt khác, từ hệ thức } c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = \left(\frac{33}{2}\right)^2 + \left(\frac{275}{17}\right)^2 = \frac{12221}{1156}.$$

Kết luận: Vậy phương trình chính tắc của hypebol (P) là $\frac{4x^2}{1089} - \frac{1156y^2}{12221} = 1$.

Câu 27: Viết phương trình chính tắc của hypebol (H) có độ dài tiêu cự bằng 8 và góc giữa hai đường tiệm cận bằng 60° .

Lời giải

Gọi phương trình chính tắc của (H) là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $b^2 = c^2 - a^2$.

Vậy phương trình chính tắc của (H) thỏa mãn là $\frac{x^2}{\frac{114}{61}} - \frac{y^2}{114} = 1$.

Câu 29: Viết phương trình chính tắc của hypebol (H) đi qua $M(-2;1)$ và góc giữa hai đường tiệm cận bằng 60° .

Lời giải

Do $M(-2;1) \in (H)$ nên $\frac{4}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1$. (5)

Phương trình hai đường tiệm cận là

$$\Delta_1: y = \frac{b}{a}x \text{ hay } bx - ay = 0, \Delta_2: y = -\frac{b}{a}x \text{ hay } bx + ay = 0.$$

Vì góc giữa hai đường tiệm cận bằng 60° nên $\cos 60^\circ = \frac{|b^2 - a^2|}{b^2 + a^2}$ hay

$$\frac{1}{2} = \frac{|b^2 - a^2|}{b^2 + a^2} \Leftrightarrow 2|b^2 - a^2| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2(b^2 - a^2) = b^2 + a^2 \\ 2(b^2 - a^2) = -(b^2 + a^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 3a^2 \\ a^2 = 3b^2 \end{cases}.$$

• Với $b^2 = 3a^2$ thay vào (5) được $a^2 = \frac{11}{3}$, $b^2 = 11$.

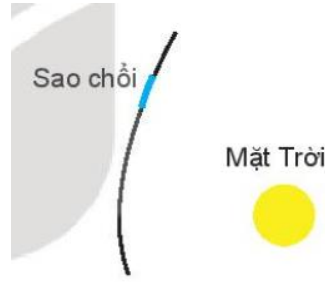
Suy ra phương trình hypebol (H) là $\frac{x^2}{\frac{11}{3}} - \frac{y^2}{11} = 1$.

• Với $a^2 = 3b^2$ thay vào (5) được $a^2 = 1$, $b^2 = \frac{1}{3}$.

Suy ra phương trình hypebol (H) là $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$.

Vậy có hai hypebol thỏa mãn có phương trình là $\frac{x^2}{\frac{11}{3}} - \frac{y^2}{11} = 1$ và $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$.

Câu 30: Một sao chổi đi qua hệ mặt trời theo quỹ đạo là một nhánh hypebol nhận tâm Mặt Trời là một tiêu điểm, khoảng cách gần nhất từ sao chổi này đến tâm Mặt Trời là $3 \cdot 10^8 \text{ km}$ và tâm sai của quỹ đạo hypebol là 3,6. Hãy lập phương trình chính tắc của hypebol chứa quỹ đạo, với 1 đơn vị đo trên mặt phẳng tọa độ tương ứng với 10^8 km trên thực tế.



Lời giải

Phương trình chính tắc của hypebol (H) : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} c - a = 3 \\ e = \frac{c}{a} = 3,6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 + a \\ c = 3,6a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 + a \\ a = \frac{3}{2,6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{15}{13} \\ c = \frac{54}{13} \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác } b^2 = c^2 - a^2 = \left(\frac{54}{13}\right)^2 - \left(\frac{15}{13}\right)^2 = \frac{207}{13}.$$

$$\text{Vậy phương trình chính tắc của } (H) \text{ là } \frac{x^2}{\frac{225}{169}} - \frac{y^2}{\frac{207}{13}} = 1.$$

Câu 31: Cho Hypeobl $(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ (1). Tìm tọa độ điểm M thuộc (H) sao cho M nhìn hai tiêu điểm của (H) dưới một góc vuông.

Lời giải

$$\text{Ta có } c^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow c = 5.$$

Do đó hai tiêu điểm là $F_1(-5; 0)$, $F_2(5; 0)$.

Gọi $M(x; y) \in (H)$, khi đó $\overrightarrow{F_1M} = (x+5; y)$, $\overrightarrow{F_2M} = (x-5; y)$.

$$\overrightarrow{F_1M} \cdot \overrightarrow{F_2M} = x^2 - 25 + y^2 = 0 \quad (2).$$

$$\text{Từ (2) suy ra } y^2 = 25 - x^2. \text{ Thế vào (1) ta được } \frac{x^2}{16} - \frac{(25 - x^2)^2}{9} = 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{4\sqrt{34}}{5} \Rightarrow y = \pm \frac{9}{5}.$$

Vậy có 4 điểm thỏa mãn bài ra là:

$$M_1\left(\frac{4\sqrt{34}}{5}; \frac{9}{5}\right), M_2\left(\frac{-4\sqrt{34}}{5}; \frac{9}{5}\right), M_3\left(\frac{4\sqrt{34}}{5}; \frac{-9}{5}\right), M_4\left(\frac{-4\sqrt{34}}{5}; \frac{-9}{5}\right).$$

Câu 32: Cho Hypebol $(H): \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$. Tìm tất cả các điểm $M \in (H)$ sao cho $\frac{MF_2}{MF_1} = \frac{1}{2}$.

Lời giải

♦ **TH1:** Với $x_M = y_M$ thay tọa độ điểm M vào phương trình $(H): \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ ta được

$$x_M^2 = \frac{144}{7} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{12\sqrt{7}}{7} \Rightarrow y_M = \frac{12\sqrt{7}}{7} \\ x_M = -\frac{12\sqrt{7}}{7} \Rightarrow y_M = -\frac{12\sqrt{7}}{7} \end{cases}$$

Vậy $M_1\left(\frac{12\sqrt{7}}{7}; \frac{12\sqrt{7}}{7}\right); M_2\left(-\frac{12\sqrt{7}}{7}; -\frac{12\sqrt{7}}{7}\right)$ thỏa mãn bài toán.

♦ **TH2:** Với $x_M = -y_M$ thay tọa độ điểm M vào phương trình $(H): \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ ta được

$$x_M^2 = \frac{144}{7} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{12\sqrt{7}}{7} \Rightarrow y_M = -\frac{12\sqrt{7}}{7} \\ x_M = -\frac{12\sqrt{7}}{7} \Rightarrow y_M = \frac{12\sqrt{7}}{7} \end{cases}$$

Vậy $M_3\left(\frac{12\sqrt{7}}{7}; -\frac{12\sqrt{7}}{7}\right); M_4\left(-\frac{12\sqrt{7}}{7}; \frac{12\sqrt{7}}{7}\right)$.

♦ Do đó có 4 điểm $M_1\left(\frac{12\sqrt{7}}{7}; \frac{12\sqrt{7}}{7}\right); M_2\left(-\frac{12\sqrt{7}}{7}; -\frac{12\sqrt{7}}{7}\right); M_3\left(\frac{12\sqrt{7}}{7}; -\frac{12\sqrt{7}}{7}\right); M_4\left(-\frac{12\sqrt{7}}{7}; \frac{12\sqrt{7}}{7}\right)$ thỏa mãn bài toán.

Câu 35: Cho Hypebol $(H): \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (H) sao cho M thuộc nhánh phải và khoảng cách từ M đến tiêu điểm F_1 đạt nhỏ nhất.

Lời giải

Theo giả thiết ta có
$$\begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 16 \\ c^2 = 25 + 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 4 \\ c = \sqrt{41} \end{cases}$$

Gọi $M(x; y) \in (H)$

Khi đó $x^2 = 25\left(\frac{y^2}{16} + 1\right) \geq 25 \Rightarrow x \geq 5$.

$$MF_1 = 5 + \frac{\sqrt{41}}{5}x \geq 5 + \frac{\sqrt{41}}{5} \cdot 5 = 5 + \sqrt{41}.$$

Vậy MF_1 nhỏ nhất khi $M \equiv A(5; 0)$.

Câu 36: Cho Hypebol $(H): \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (H) sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $\Delta: y = x + 1$ đạt nhỏ nhất.

Lời giải

Nhận xét: Ta có (H) và (Δ) không có điểm chung.

Gọi $M(x_0; y_0) \in (H)$. Phương trình tiếp tuyến của (H) tại M là $d: \frac{x_0 \cdot x}{4} - y_0 \cdot y = 1$.

Khoảng cách từ M đến đường thẳng $\Delta: y = x + 1$ đạt nhỏ nhất thì điều kiện cần là M thuộc đường thẳng song song với Δ .

Khi Δ song song với d thì $\frac{\frac{x_0}{4}}{1} = \frac{-y_0}{-1} \Rightarrow y_0 = \frac{x_0}{4}$.

Thay vào phương trình của (H) ta được

$$\frac{x_0^2}{4} - \left(\frac{x_0}{4}\right)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{4}{\sqrt{4}} \Rightarrow y_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow M_1\left(\frac{4}{\sqrt{4}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ x_0 = -\frac{4}{\sqrt{4}} \Rightarrow y_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow M_2\left(-\frac{4}{\sqrt{4}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \end{cases}$$

Với $M_1\left(\frac{4}{\sqrt{4}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ thì $d(M_1; \Delta) = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

Với $M_2\left(-\frac{4}{\sqrt{4}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ thì $d(M_2; \Delta) = \frac{-1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

Vậy $M\left(-\frac{4}{\sqrt{4}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ là điểm cần tìm.

Câu 37: Trong mặt phẳng Oxy, cho hyperbol $(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Tìm điểm M trên (H) sao cho M nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông.

Lời giải

Hyperbol (H) có hai tiêu điểm $F_1(-5; 0), F_2(5; 0)$

Vì $F_1MF_2 = 90^\circ \Leftrightarrow M$ nằm trên đường tròn tâm O có bán kính $R = \frac{F_1F_2}{2} = 5$ nên có phương trình là $(C): x^2 + y^2 = 25$

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{544}{25} \\ y^2 = \frac{81}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{4\sqrt{34}}{5} \\ y = \pm \frac{9}{5} \end{cases}$$

Vậy có bốn điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán là $M\left(\pm\frac{4\sqrt{34}}{5}; \pm\frac{9}{5}\right)$.

Lời giải

Hyperbol (H) có hai tiêu điểm $F_1(-5;0), F_2(5;0)$

$$F_1 F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2 - 2MF_1.MF_2.\cos 60^\circ = (MF_1 - MF_2)^2 + MF_1.MF_2$$

$$\Leftrightarrow 100 = 64 + \left(4 + \frac{5}{4}x\right)\left(-4 + \frac{5}{4}x\right) \Leftrightarrow x = \pm \frac{8\sqrt{13}}{5} \Rightarrow y = \pm \frac{9\sqrt{3}}{5}$$

Vậy có bốn điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán là $M\left(\pm\frac{8\sqrt{13}}{5}; \pm\frac{9\sqrt{3}}{5}\right)$.

Câu 39: Trong mặt phẳng Oxy, cho Hypebol $(H): \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (H) sao cho $MF_1 = 2MF_2$.

Lời giải

Ta có (H): $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$ suy ra $a = \sqrt{12}, b = 2, c = \sqrt{a^2 + b^2} = 4$, kéo theo $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$

Gọi $M(x_M; y_M)$ suy ra $\overrightarrow{F_1M} = (x_M + 4; y_M)$, $\overrightarrow{F_2M} = (x_M - 4; y_M)$.

Theo đề bài $MF_1 = 2MF_2$ và $M \in (H)$: $|MF_1 - MF_2| = 2a$ ta được

$$MF_1 = 2a \Leftrightarrow \left| a + \frac{c}{a} x_M \right| = 2a \Leftrightarrow x_M = 9; x_M = 1 \text{ và } \frac{x_M^2}{12} - \frac{y_M^2}{4} = 1 \Leftrightarrow y_M^2 = \frac{1}{3} x_M^2 - 4 \text{ với điều kiện}$$

$$x_M \leq -2\sqrt{3}; x_M \geq 2\sqrt{3}. \text{ Vậy } M(9; \pm\sqrt{23}).$$

Câu 40: Trong mặt phẳng Oxy, cho Hypebol $(H): \frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{8} = 1$ và hai điểm $A(6; -1)$, $B(-6; 1)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (H) sao cho tam giác ABM có diện tích bằng 30.

Lời giải

Ta được hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{17}{8}x_0^2 + y_0^2 = 11 \\ \frac{x_0^2}{4} - \frac{y_0^2}{5} = 1 \end{cases}$$

$$\left(-\frac{8\sqrt{6}}{9}; -\frac{5\sqrt{3}}{9}\right); \left(-\frac{8\sqrt{6}}{9}; \frac{5\sqrt{3}}{9}\right); \left(\frac{8\sqrt{6}}{9}; -\frac{5\sqrt{3}}{9}\right); \left(\frac{8\sqrt{6}}{9}; \frac{5\sqrt{3}}{9}\right).$$

Câu 42: Cho Hypebol $(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$. Xác định tọa độ điểm $M \in (H)$ sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $\Delta: y = x + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

♦ Gọi $M(x_0; y_0) \in (H)$. Phương trình tiếp tuyến của (H) tại M là $d: \frac{x.x_0}{16} - \frac{y.y_0}{4} = 1$.

♦ Để Δ/d thì $\frac{x_0}{1} = \frac{-y_0}{-1} \neq \frac{-1}{1} \Rightarrow \begin{cases} y_0 = \frac{x_0}{4} \\ x_0 \neq -16 \end{cases} \Rightarrow M\left(x_0; \frac{x_0}{4}\right)$

Thay toạ độ điểm M vào phương trình (H) ta có:

$$\frac{x_0^2}{16} - \frac{x_0^2}{64} = 1 \Leftrightarrow \frac{3x_0^2}{64} = 1 \Leftrightarrow x_0^2 = \frac{64}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{8\sqrt{3}}{3} \rightarrow y_0 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ x_0 = -\frac{8\sqrt{3}}{3} \rightarrow y_0 = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Với $M\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ ta có: $d(M, \Delta) = \frac{2\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$.

Vói $M\left(-\frac{8\sqrt{3}}{3}; -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ ta có: $d(M, \Delta) = \frac{2\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$.

Ta thấy $\frac{2\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} < \frac{2\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

♦ Vậy điểm $M\left(-\frac{8\sqrt{3}}{3}; -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \in (H)$ thì khoảng cách từ M đến đường thẳng $\Delta: y = x + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 43: Cho Hypebol $(H): \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$. Xác định tọa độ điểm $M \in (H)$ sao cho tam giác MF_1F_2 vuông tại F_1 .

Lời giải

♦ Ta có $a^2 = 9; b^2 = 7 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4 \Rightarrow F_1(-4; 0); F_2(4; 0)$.

$$MF_1 = \left| a + \frac{c}{a} x_M \right| = \left| 3 + \frac{4}{3} x_M \right|.$$

$$MF_2 = \left| a - \frac{c}{a} x_M \right| = \left| 3 - \frac{4}{3} x_M \right|.$$

$$F_1 F_2 = 2c = 8.$$

$$\text{Để tam giác } MF_1 F_2 \text{ vuông tại } F_1 \text{ thì } MF_1^2 + F_1 F_2^2 = MF_2^2 \Leftrightarrow \left(3 + \frac{4}{3} x_M \right)^2 + 64 = \left(3 - \frac{4}{3} x_M \right)^2$$

$$\Leftrightarrow 8x_M + 64 = -8x_M \Leftrightarrow 16x_M = -64 \Leftrightarrow x_M = -4 \Rightarrow y_M^2 = \frac{49}{9} \Rightarrow \begin{cases} y_M = \frac{7}{3} \\ y_M = -\frac{7}{3} \end{cases}.$$

♦ Do đó có 2 điểm $M_1\left(-4; \frac{7}{3}\right); M_2\left(-4; -\frac{7}{3}\right)$ thỏa mãn bài toán.

Câu 44: Cho hyperbol $(H): 3x^2 - 4y^2 = 12$ có hai tiêu điểm là F_1, F_2 . Tìm trên một nhánh của (H) hai điểm P, Q sao cho ΔOPQ là tam giác đều.

Lời giải

$$\text{Ta có: } (H): 3x^2 - 4y^2 = 12 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1.$$

$$\text{Gọi } P(x_0; y_0) \in (H) \Rightarrow Q(x_0; -y_0)$$

$$\Delta OPQ \text{ đều} \Leftrightarrow OP = PQ \Leftrightarrow 4y_0^2 = x_0^2 + y_0^2 \Leftrightarrow x_0^2 = 3y_0^2.$$

Thay vào (H) ta có:

$$9x_0^2 - 4y_0^2 = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = \frac{2\sqrt{15}}{5} \\ y_0 = -\frac{2\sqrt{15}}{5} \end{cases} \Rightarrow x_0 = \pm \frac{6\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Vậy } P\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}; \frac{2\sqrt{15}}{5}\right), Q\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}; -\frac{2\sqrt{15}}{5}\right).$$

Câu 45: Trong hệ tọa độ Oxy cho Hypebol $(H): \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (H) sao cho

M thuộc nhánh phải sao cho biểu thức $T = (MF_1 + MF_2)^2 - 3OM^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

$$\text{Theo giả thiết ta có } \begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 16 \\ c^2 = 25 + 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 4 \\ c = \sqrt{41} \end{cases}.$$

$$\text{Gọi } M(x; y) \in (H)$$

$$\text{Khi đó } x^2 = 25 \left(\frac{y^2}{16} + 1 \right) \geq 25 \Rightarrow x \geq 5.$$

$$\text{Ta có } d(M, \Delta) = \frac{|3x_0 + 2y_0 + 1|}{\sqrt{13}} = \frac{|(3x_0 + 2y_0) - (-1)|}{\sqrt{13}}$$

Áp dụng bất đẳng thức $|A - B| \geq ||A| - |B||$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $AB \geq 0$

$$\text{Ta được } d(M, \Delta) = \frac{|3x_0 + 2y_0 + 1|}{\sqrt{13}} = \frac{|(3x_0 + 2y_0) - (-1)|}{\sqrt{13}} \geq \frac{||3x_0 + 2y_0| - 1|}{\sqrt{13}}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $3x_0 + 2y_0 \geq 0$.

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức } (ax + by)^2 \geq (a^2 - b^2)(x^2 - y^2)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $ay + bx = 0$.

$$\text{Ta được } (3x_0 + 2y_0)^2 = (\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}x_0 + 1 \cdot 2y_0)^2 \geq (\sqrt{3}^2 - 1^2)(3x_0^2 - 4y_0^2) = 2.72 = 144.$$

$$\text{Tương đương } |3x_0 + 2y_0| \geq 12.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } 2\sqrt{3}y_0 + \sqrt{3}x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -2y_0.$$

$$\text{Từ, và ta được } d(M, \Delta) \geq \frac{11}{\sqrt{13}}.$$

$$\text{Từ và ta được dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} y_0 = 3 \\ x_0 = -6 \end{cases}$$

$$\text{hoặc } \begin{cases} y_0 = -3 \\ x_0 = 6 \end{cases}.$$

Vậy $M(6; -3)$.

Câu 48: Cho $(H): \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ và hai điểm $A(3; 2), B(0; 1)$. Tìm điểm $C \in (H)$ sao cho diện tích ΔABC

có diện tích bằng $\frac{7}{2}$.

Lời giải

Đường thẳng AB qua $A(3; 2), B(0; 1)$ có phương trình là $x - 3y + 3 = 0$.

Giả sử $C(a, b)$. Ta có

$$d(C, AB) = \frac{|a - 3b + 3|}{\sqrt{10}}, AB = \sqrt{(0 - 3)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{10}, S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} d(C, AB) \cdot AB = \frac{|a - 3b + 3|}{2}$$

$$\text{Vì diện tích của } \Delta ABC \text{ bằng } 30 \text{ nên } \frac{|a - 3b + 3|}{2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 3b = 2 & (1) \\ a - 3b = -8 & (2) \end{cases}$$

Lại có $C \in (H)$ nên $\frac{a^2}{4} - b^2 = 1$.

TH1: Từ (1) suy ra $a = 2 + 3b$ thế vào phương trình (3) ta được

$$\frac{(2+3b)^2}{4} - b^2 = 1 \Leftrightarrow 5b^2 + 12b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = -\frac{12}{5} \end{cases}$$

Với $b = 0 \Rightarrow a = 2$.

Với $b = -\frac{12}{5} \Rightarrow a = -\frac{26}{5}$.

TH2: Từ (2) suy ra $a = 3b - 8$ thế vào (3) ta được

$$\frac{(-8+3b)^2}{4} - b^2 = 1 \Leftrightarrow 5b^2 - 48b + 60 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{24-2\sqrt{69}}{5} \\ b = \frac{24+2\sqrt{69}}{5} \end{cases}$$

Với $b = \frac{24-2\sqrt{69}}{5} \Rightarrow a = \frac{32-2\sqrt{69}}{5}$.

Với $b = \frac{24+2\sqrt{69}}{5} \Rightarrow a = \frac{32+2\sqrt{69}}{5}$.

Vậy có 4 điểm M thỏa mãn là

$$(2;0), \left(-\frac{26}{5}; -\frac{12}{5}\right), \left(\frac{32-2\sqrt{69}}{5}; \frac{24-2\sqrt{69}}{5}\right), \left(\frac{32+2\sqrt{69}}{5}; \frac{24+2\sqrt{69}}{5}\right).$$

Câu 49: Cho Hypebol $(H): \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1$ và hai điểm $I(0;2)$, $A(3;6)$. Xác định toạ độ điểm $M \in (H)$ thỏa mãn điều kiện M cũng thuộc đường tròn tâm I , bán kính IA .

Lời giải

♦ Gọi $M(x_0; y_0) \in (H) \Rightarrow \frac{x_0^2}{1} - \frac{y_0^2}{3} = 1 \Leftrightarrow x_0^2 = 1 + \frac{y_0^2}{3}$ (1).

♦ Mặt khác vì M cũng thuộc đường tròn tâm I , bán kính IA nên $IM = IA$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x_0 - 0)^2 + (y_0 - 2)^2} = 5 \Leftrightarrow x_0^2 + (y_0 - 2)^2 = 25$$
 (2).

Thay (1) vào (2) ta được $1 + \frac{y_0^2}{3} + (y_0 - 2)^2 = 25 \Leftrightarrow \frac{4}{3}y_0^2 - 4y_0 - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = \frac{3+\sqrt{69}}{2} \\ y_0 = \frac{3-\sqrt{69}}{2} \end{cases}$.

Do đó $x_1 = 2\sqrt{2}$, $x_2 = -2\sqrt{2}$, $x_3 = 4 + 2\sqrt{10}$, $x_4 = 4 - 2\sqrt{10} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 128$.

Câu 51: Cho hai điểm $A(2;3)$, $B(5;8)$ và hypebol $(H): \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{1} = 1$. Điểm $M(a;b) \in (H)$ sao cho diện tích tam giác MAB nhỏ nhất. Giá trị biểu thức $T = a + b$ bằng

Lời giải

Ta có $\overline{AB} = (3;5) \Rightarrow$ đường thẳng AB có vector pháp tuyến $\vec{n} = (5;-3) \Rightarrow$ phương trình đường thẳng AB là $5x - 3y - 1 = 0$.

$$d(M, AB) = \frac{|5a - 3b - 1|}{\sqrt{34}} \Rightarrow S_{\Delta MAB} = \frac{1}{2} AB \cdot d(M, AB) = \frac{1}{2} |5a - 3b - 1|.$$

Vì $M \in (H) \Rightarrow a^2 - b^2 = 1$ (1).

Đặt $m = 5a - 3b - 1 \Rightarrow b = \frac{5a - 1 - m}{3}$. Thay vào (1) có $a^2 - \left(\frac{5a - 1 - m}{3}\right)^2 = 1$

$$\Leftrightarrow 16a^2 - 10(m+1)a + m^2 + 2m + 10 = 0$$

Phương trình trên có nghiệm khi $\Delta' = 25(m+1)^2 - 16(m^2 + 2m + 10) \geq 0$

$$\Leftrightarrow 9m^2 + 18m - 135 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -5 \\ m \geq 3 \end{cases} \Rightarrow |m| \geq 3$$

$$\text{Do đó } S_{\Delta MAB} \geq \frac{3}{2} \Rightarrow \min S_{\Delta MAB} = \frac{3}{2} \text{ khi } \begin{cases} a = \frac{5}{4} \\ b = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Vậy $M\left(\frac{5}{4}; \frac{3}{4}\right) \Rightarrow T = a + b = 2$.