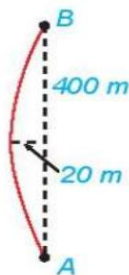


PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG

Cơ sở lý thuyết:

- ♦ Phương trình chính tắc của parabol $(P): y^2 = 2px, p > 0$.
- ♦ $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ gọi là tiêu điểm của parabol (P) .
- ♦ $\Delta: x + \frac{p}{2} = 0$ gọi là đường chuẩn của parabol (P) .
- ♦ O gọi là đỉnh của parabol.
- ♦ Ox gọi là trục đối xứng của parabol.
- ♦ p gọi là tham số tiêu của parabol (P) .
- ♦ Nếu $M(x; y) \in (P)$ thì $MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|$.
- ♦ Nếu $M(x; y) \in (P)$ thì $x \geq 0$ và $M'(x; -y) \in (P)$.

Câu 1: Khúc cua của một con đường có hình dạng parabol, điểm đầu vào khúc cua là A , điểm cuối là B , khoảng cách $AB = 400\text{ m}$. Đỉnh parabol (P) của khúc cua cách đường thẳng AB một khoảng 20m và cách đều A, B .



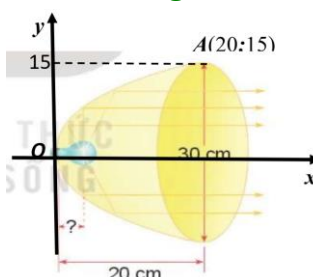
- a.** Lập phương trình chính tắc của (P) , với 1 đơn vị đo trong mặt phẳng tọa độ tương ứng với 1m trên thực tế.
- b.** Lập phương trình chính tắc của (P) , với 1 đơn vị đo trong mặt phẳng tọa độ tương ứng với 1 km trên thực tế.

Lời giải

$$200^2 = 2p \cdot 20 \Leftrightarrow p = \frac{40000}{40} = 1000.$$
$$0,2^2 = 2p.0,02 \Leftrightarrow p = 1.$$

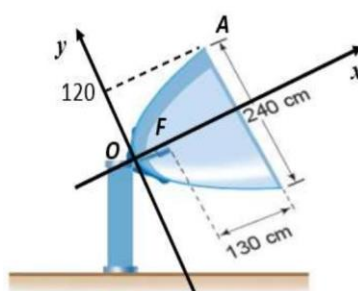
hình vẽ, suy ra parabol (P) đi qua $A(30;20)$, khi đó ta có $20^2 = 2p.30 \Leftrightarrow p = \frac{20}{3}$.

Câu 3: Xét đèn có bát đáy dạng parabol với kích thước được thể hiện trong hình vẽ bên. Dây tóc bóng đèn được đặt ở vị trí tiêu điểm.
Tính khoảng cách từ dây tóc tới đỉnh của bát đáy.


$$15^2 = 2p \cdot 20 \Leftrightarrow p = \frac{225}{40} = 5,625.$$

Vậy khoảng cách từ dây tóc tới đỉnh của bát đáy bóng đèn là $d = \frac{p}{2} = \frac{5,625}{2} = 2,8125(\text{cm})$.

Câu 4: Anten vệ tinh parabol trong hình ảnh bên có đầu thu đặt tại tiêu điểm, đường kính miệng anten là 24cm, khoảng cách từ vị trí đặt đầu thu tới miệng anten là 130cm. Tính khoảng cách từ vị trí đặt đầu thu tới đỉnh anten.



$$120^2 = 2p \cdot \left(\frac{p}{2} + 130 \right)$$

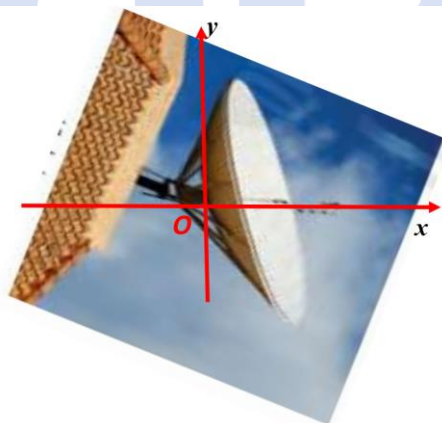
$$\Leftrightarrow p^2 + 260p - 14400 = 0 \Leftrightarrow p \approx 46,9 \text{ cm.}$$

Câu 5: Mặt cắt của một chảo ăngten là một phần của parabol (P) . Cho biết đầu thu tín hiệu đặt tại tiêu điểm F cách đỉnh O của chảo một khoảng là $\frac{1}{6}m$.

- Viết phương trình chính tắc của (P) .
- Tính khoảng cách từ một điểm M có hoành độ 0,06 trên ăng-ten đến F .



Lời giải



- a. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , với 1 đơn vị đo trong mặt phẳng tọa độ tương ứng với $1m$ trên thực tế và gốc tọa độ O trùng với đỉnh của chảo. Gọi phương trình chính tắc của parabol (P) là $y^2 = 2px$, trong đó $p > 0$ là tham số tiêu.

Theo giả thiết đầu thu tín hiệu đặt tại tiêu điểm F cách đỉnh O của chảo một khoảng là $\frac{1}{6}m$,

suy ra $\frac{p}{2} = \frac{1}{6} \Rightarrow p = \frac{1}{3}$. Phương trình của parabol (P) là $y^2 = \frac{2}{3}x$.

- b. Ta có điểm $M(0,06;0,2)$ nằm trên ăng-ten và tiêu điểm $F\left(\frac{1}{6};0\right)$, suy ra $MF = \frac{17}{75}m$.

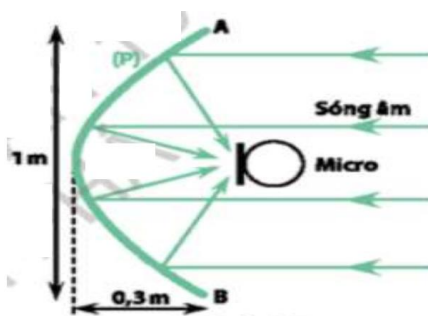
Câu 6: Để thu tín hiệu truyền từ vệ tinh người ta sử dụng ăng-ten parabol được cấu tạo từ bề mặt phản xạ sóng điện từ mà mặt cắt qua trục là đường parabol. Tín hiệu truyền từ xa có thể xem như



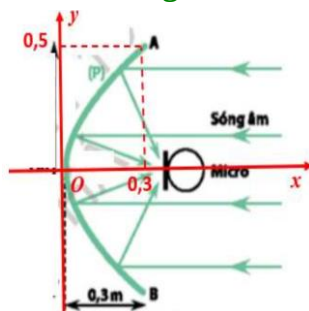
Lời giải

(P) đi qua $A(x_A; y_A)$ với $y_A = \frac{2,4}{2} = 1,2$. Khi đó $1,2^2 = 3,6x_A \Rightarrow x_A = 0,4$.

Câu 7: Trong một trận thi đấu bóng đá, một đài truyền hình đã sử dụng một thiết bị để thu lại các cuộc trò chuyện của cầu thủ trên sân. Mặt cắt của thiết bị này là một parabol (P) như hình vẽ bên. Âm thanh khi đến (P) sẽ hội tụ về một micro đặt tại tiêu điểm. Nhờ vậy tín hiệu âm thanh thu được sẽ rõ ràng và ít bị thất thoát. Biết rằng thiết bị này có đường kính là 1m và chiều sâu là 0,3m. Hỏi micro cần đặt cách đỉnh (P) bao nhiêu mét?

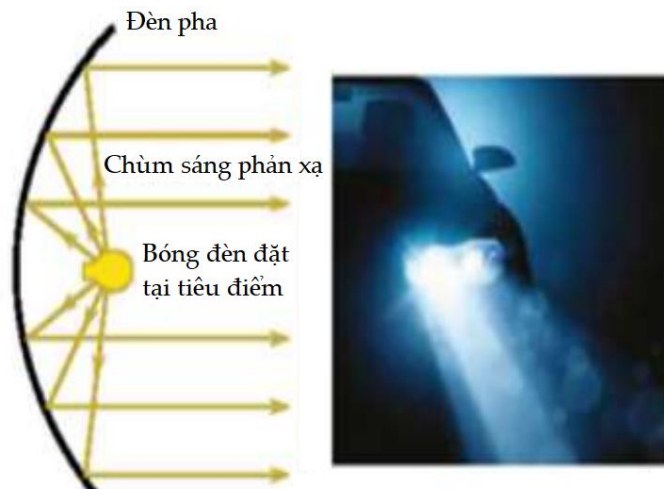


Lời giải



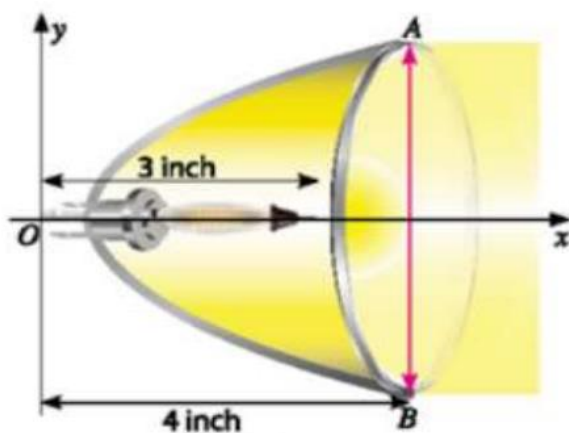
Kết luận: Vậy phương trình của parabol (P) là $y^2 = \frac{5}{6}x$.

b. Hỏi khi sao chổi nằm trên đường vuông góc với trục đối xứng của quỹ đạo tại tâm Mặt Trời thì khoảng cách từ sao chổi đến tâm Mặt Trời là bao nhiêu kilômét?



Một đèn pha xe ô tô cấu tạo bởi một gương phản xạ mà mặt cắt là một parabol P . Biết rằng chiều sâu của đèn pha là 4 inch và nguồn sáng cách đỉnh P 3 inch. Hãy tìm đường kính của đèn pha. Kết quả tính theo đơn vị inch và làm tròn đến hàng phần mười.

Lời giải



Giả sử P có phương trình chính tắc là $y^2 = 2px$. Theo giả thiết thì tiêu điểm của P cách đỉnh 3 inch nên $\frac{p}{2} = 3$ hay $p = 6$. Vậy phương trình của P là $y^2 = 12x$.

Ta có điểm A 4; $y_A \in P$ nên $y_A^2 = 48 \Leftrightarrow \begin{cases} y_A = 4\sqrt{3} \\ y_A = -4\sqrt{3} \end{cases}$. Do $y_A > 0$ nên $y_A = 4\sqrt{3}$.

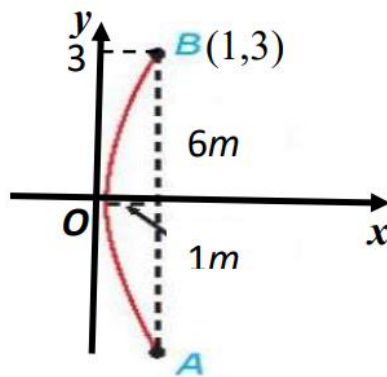
Kết luận: Vậy đường kính của đèn pha là $AB = 2y_A = 8\sqrt{3} \approx 13,86$.

Câu 10: Một bộ thu năng lượng mặt trời để làm nước nóng được làm bằng một tấm thép không gỉ có mặt cắt hình parabol. Nước sẽ chảy thông qua một đường ống nằm ở tiêu điểm của parabol.



- Viết phương trình chính tắc của parabol.
- Tính khoảng cách từ tâm của đường ống đến đỉnh của parabol.

Lời giải



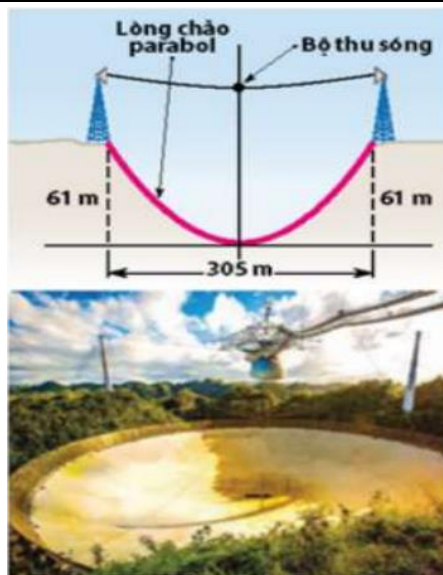
a. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , với 1 đơn vị đo trong mặt phẳng tọa độ tương ứng với 1m trên thực tế và gốc tọa độ O trùng với đỉnh của parabol. Gọi phương trình chính tắc của parabol P là $y^2 = 2px$, trong đó $p > 0$ là tham số tiêu. Từ hình vẽ, suy ra parabol P đi qua điểm $B(1; 3)$, khi đó ta có phương trình $3^2 = 2p \cdot 1 \Leftrightarrow p = \frac{9}{2}$. Vậy phương trình của parabol P là $y^2 = 9x$.



Hình ảnh: Bộ thu năng lượng mặt trời cỡ lớn.

b. Do đường ống nằm ở tiêu điểm của parabol P nên để tính khoảng cách từ tâm đường ống đến đỉnh của P ta đi tính khoảng cách từ tiêu điểm của P đến đỉnh của P . Ta có tiêu điểm $F\left(\frac{9}{4}; 0\right)$, đỉnh $O(0; 0)$ nên khoảng cách cần tìm là $d = \frac{9}{4} = 2,25m$.

Câu 11: Kính thiên văn vô tuyến lớn thứ hai thế giới đặt tại đài quan sát Arecibo ở Puerto Rico có cấu tạo như một ăng ten Parabol khổng lồ với mặt cắt là một parabol P có đường kính 305m, độ sâu của chảo là 61m và bộ thu sóng đặt tại tiêu điểm của P . Trước khi bị đổ sập và ngừng hoạt động vào ngày 01/12/2020, kính thiên văn này là biểu tượng của ngành thiên văn giúp săn lùng các tín hiệu bên ngoài Trái Đất. Hãy tính khoảng cách từ bộ thu sóng của kính thiên văn đến đỉnh của parabol.



Lời giải

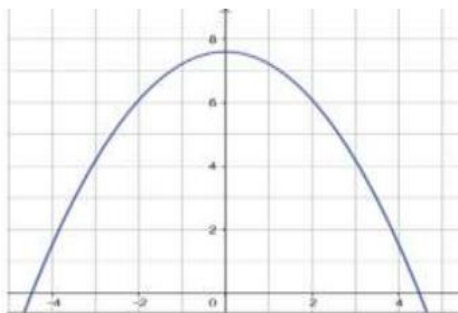
Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , với 1 đơn vị đo trong mặt phẳng tọa độ tương ứng với 1m trên thực tế và gốc tọa độ O trùng với đỉnh của parabol. Gọi phương trình chính tắc của parabol P là $y^2 = 2px$, trong đó $p > 0$ là tham số tiêu. Từ hình vẽ, suy ra parabol P đi qua điểm $A\left(61; \frac{305}{2}\right)$, ta có phương trình $\left(\frac{305}{2}\right)^2 = 2p \cdot 61 \Leftrightarrow p = \frac{1525}{8}$.

Khoảng cách từ bộ thu sóng của kính thiên văn đến đỉnh của parabol là $d = \frac{p}{2} = \frac{1525}{16}m$.

Câu 12: Cổng của một ngôi trường có dạng hình parabol. Để đo chiều cao h của cổng, một người đo khoảng cách giữa hai chân cổng được $9m$, người đó thấy nếu đứng cách chân cổng $0,5m$ thì đầu chạm cổng. Biết rằng người này cao $1,6m$; hãy tính chiều cao của cổng.



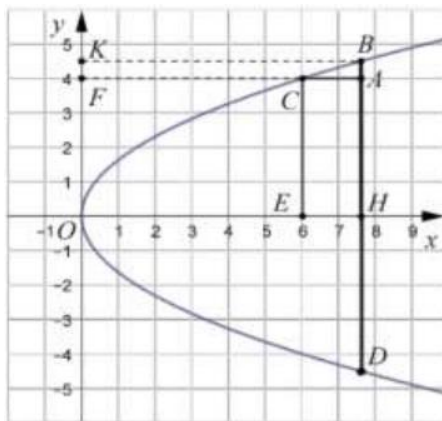
Lời giải



Cách 1: Ta chọn hệ tọa độ Oxy để parabol có phương trình $y = ax^2 + c$. Khoảng cách giữa hai chân cổng là $9m$, suy ra điểm $M(4,5; 0)$ thuộc parabol. Mặt khác một người cao $1,6m$ và đứng cách chân cổng $0,5m$ thì đầu chạm cổng, suy ra điểm $N(4,5; 1,6)$ cũng thuộc parabol. Thay tọa

$$\begin{cases} 4,5^2 a + c = 0 \\ 4^2 a + c = 1,6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{32}{85} \\ c = \frac{648}{85} \end{cases}.$$

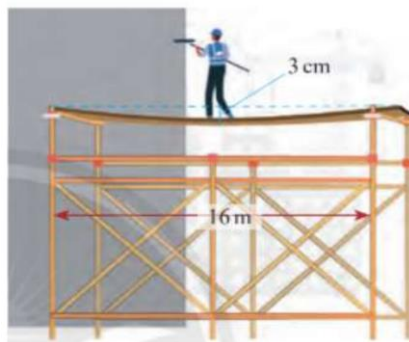
Cách 2:



phương trình của P ta được hệ:
$$\begin{cases} 4,5^2 = 2ph \\ 4^2 = 2p(h-1,6) \end{cases} \Rightarrow 2p = \frac{4,5^2}{h} = \frac{4^2}{h-1,6} \Rightarrow h \approx 7,62 \text{ m} .$$



10 | **Ths. Lê Việt – THPT Thăng Long, Hà Nội – Phone: 0835221183 - Ôn thi cam kết điểm số**



- a. Giả sử tâm ván gỗ trùng với đỉnh của parabol, tìm phương trình chính tắc của parabol.
b. Điểm có độ võng 1cm cách tâm ván gỗ bao xa?

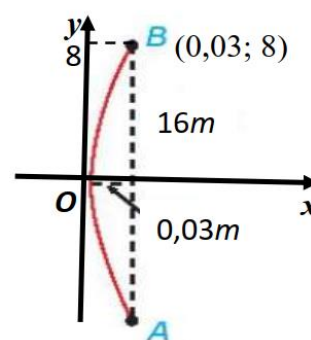
Lời giải

- a. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , với 1 đơn vị đo trong mặt phẳng tọa độ tương ứng với 1m trên thực tế và gốc tọa độ O trùng với đỉnh của parabol. Gọi phương trình chính tắc của parabol (P) là $y^2 = 2px$, trong đó $p > 0$ là tham số tiêu.

Từ hình vẽ, suy ra parabol (P) đi qua điểm $B(0,03;8)$.

Khi đó ta có phương trình $8^2 = 2p.0,03 \Leftrightarrow p = \frac{3200}{3}$.

Vậy phương trình chính tắc của parabol (P) là $y^2 = \frac{6400}{3}x$.



- b. Điểm C nằm trên ván gỗ có độ võng 1cm tương ứng 0,01

bằng 0,01m. Ngoài ra điểm C nằm trên (P) nên có tung độ bằng $\frac{1}{3}$ hoặc $-\frac{1}{3}$. vậy có

2 điểm trên ván gỗ có độ võng bằng 1cm là $C_1\left(\frac{1}{100}; \frac{8\sqrt{3}}{3}\right)$ và $C_2\left(-\frac{1}{100}; \frac{8\sqrt{3}}{3}\right)$.

Kết luận: Vậy khoảng cách cần tìm là $d = OC_1 = OC_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{100}\right)^2 + \left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2} \approx 4,62m.$

Câu 14: Mặt cắt của một chảo ăng – ten là một phần của parabol (P). Cho biết đầu thu tín hiệu đặt tại tiêu điểm F cách đỉnh O của chảo một khoảng là $\frac{1}{6}m$.



- a) Viết phương trình chính tắc của (P) .
- b) Tính khoảng cách từ một điểm $M(0,06;0,2)$ trên ăng ten đến F .

Lời giải

- a) Gọi phương trình parabol (P) là $y^2 = 2px$, $(p > 0)$

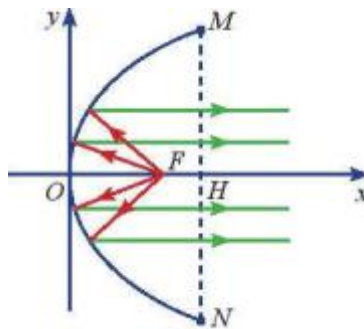
Tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2}; 0\right) \Rightarrow$ khoảng cách từ tiêu điểm F đến đỉnh O là $\frac{p}{2}$

Biết khoảng cách từ tiêu điểm F đến đỉnh O bằng $\frac{1}{6} \Rightarrow \frac{p}{2} = \frac{1}{6} \Rightarrow p = \frac{1}{3}$

Vậy phương trình parabol $(P): y^2 = \frac{2}{3}x$.

b) Bán kính qua tiêu tại $M(0,06; 0,2)$ là $MF = x + \frac{p}{2} = 0,06 + \frac{1}{6} = \frac{17}{75}$.

Câu 15: Gương phản chiếu của một đèn chiếu có mặt cắt hình parabol. Chiều rộng giữa hai mép vành của gương là $MN = 32cm$ và chiều sâu của gương là $OH = 24cm$. Viết phương trình chính tắc của parabol đó.



Lời giải

Gọi phương trình parabol (P) là $y^2 = 2px$, $(p > 0)$

Ta có chiều rộng giữa hai mép vành của gương là $MN = 32cm \Rightarrow MH = 16cm$; chiều sâu của gương là $OH = 24cm \Rightarrow M(24; 16) \in (P) \Rightarrow 16^2 = 2p \cdot 24 \Rightarrow p = \frac{16}{3}$

Vậy phương trình parabol $(P): y^2 = \frac{32}{3}x$.

Câu 16: Viết Phương trình chính tắc của parabol (P) , biết rằng (P) cắt đường thẳng $\Delta: 3x - y = 0$ tại hai điểm $A; B$ sao cho $AB = 4\sqrt{2}$.

Lời giải

Gọi phương trình chính tắc của parabol (P) là: $y^2 = 2px$.

Ta thấy (P) luôn cắt đường thẳng Δ tại gốc tọa độ, giả sử $B \equiv O$ và A là giao điểm còn lại.

Ta có: $A \in \Delta \Rightarrow A(a; 3a)$.

Mặt khác: $AB = 4\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{a^2 + 9a^2} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow a^2 = \frac{16}{5} \Rightarrow a = \pm \frac{4}{\sqrt{5}}$.

Nếu $a = \frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow \left(3 \cdot \frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 = 2p \cdot \frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow p = \frac{18}{\sqrt{5}} \Rightarrow (P): y^2 = \frac{36}{\sqrt{5}}x$.

Nếu $a = -\frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow \left(3 \cdot \frac{-4}{\sqrt{5}}\right)^2 = 2p \cdot \left(\frac{-4}{\sqrt{5}}\right)$ không thỏa mãn điều kiện.

Lời giải

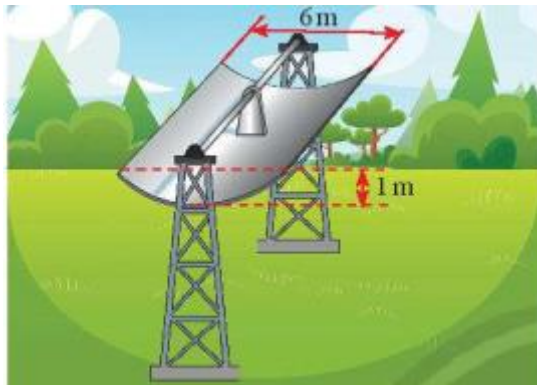
$$A \in (E) \Rightarrow 4t^2 + 6 = 24 \Rightarrow t = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

$$A \in (P) \Rightarrow 1 = 2p \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow p = \frac{\sqrt{2}}{6} \Rightarrow (P): y^2 = \frac{\sqrt{2}}{3} x.$$

Lời giải

$$\begin{cases} 4,5^2 = 2px_0 \\ 4^2 = 2p(x_0 - 1,6) \end{cases} \Rightarrow 2p = \frac{4,5^2}{x_0} = \frac{4^2}{x_0 - 1,6} = \frac{4,5^2 - 4^2}{1,6} = \frac{85}{32}$$

13 | **Ths. Lê Việt – THPT Thăng Long, Hà Nội – Phone: 0835221183 - Ôn thi cam kết điểm số**



Lời giải

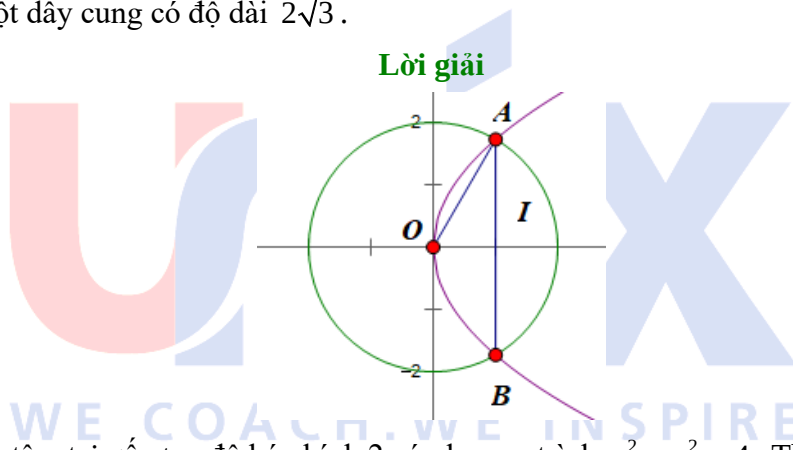
Gọi phương trình parabol (P) là $y^2 = 2px$, $(p > 0)$

Ta có chiều rộng giữa hai mép của mặt cắt là $MN = 6m \Rightarrow MH = 3m$; chiều sâu của mặt cắt là $OH = 1m \Rightarrow M(1;3) \in (P) \Rightarrow 3^2 = 2p \cdot 1 \Rightarrow p = \frac{9}{2}$

Vậy phương trình parabol (P) : $y^2 = 9x$.

Câu 20: Viết phương trình chính tắc của parabol biết parabol cắt đường tròn có tâm là gốc tọa độ bán kính 2 theo một dây cung có độ dài $2\sqrt{3}$.

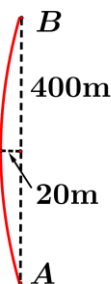
Lời giải



Đường tròn có tâm tại gốc tọa độ bán kính 2 có phương trình $x^2 + y^2 = 4$. Theo giả thiết ta có $AI = \sqrt{3}; OI = \sqrt{4-3} = 1$ nên $A(1; \sqrt{3})$.

Parabol có phương trình $y^2 = 2px$ đi qua A suy ra $p = \frac{3}{2}$ nên parabol cần tìm $y^2 = 3x$.

Câu 21: Khúc cua của một con đường có dạng hình parabol, điểm đầu vào khúc cua là A , điểm cuối là B , khoảng cách $AB = 400m$. Đỉnh parabol (P) của khúc cua cách đường thẳng AB một khoảng 20m và cách đều A, B .



Lập phương trình chính tắc của (P) , với 1 đơn vị đo trong mặt phẳng tọa độ tương ứng 1m trên thực tế.

Lời giải

Nếu 1 đơn vị đo trong mặt phẳng tọa độ tương ứng 1m trên thực tế thì ta có $B(20;200)$.

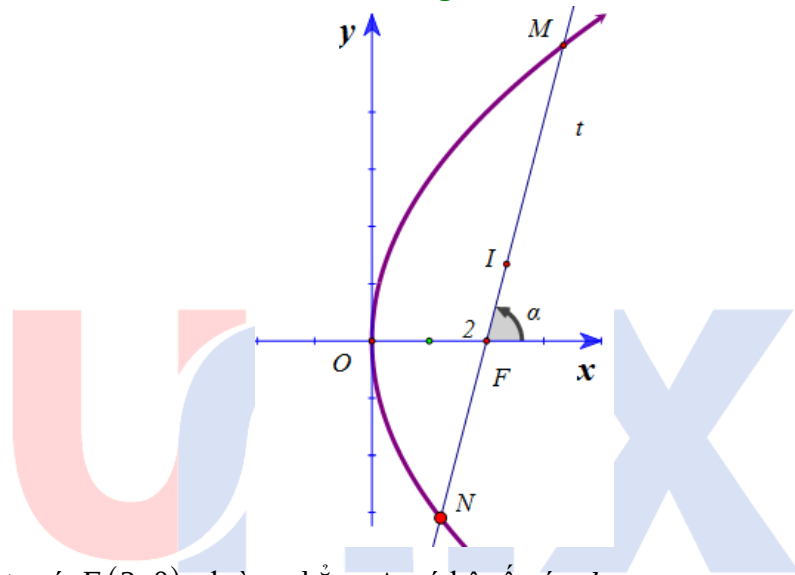
Do $B(20;200)$ thuộc (P) nên thay tọa độ điểm B vào phương trình (P) ta được:

$$200^2 = 2p \cdot 20 \Rightarrow p = 1000.$$

Vậy phương trình chính tắc của (P) là: $y^2 = 2000x$.

Câu 22: Trong mặt phẳng Oxy cho parabol $(P): y^2 = 8x$. Đường thẳng Δ không trùng với trục Ox đi qua tiêu điểm F của (P) sao cho góc hợp bởi hai tia Fx và Ft là tia của Δ nằm phía trên trục hoành một góc bằng $\alpha (\alpha \neq 90^\circ)$. Biết Δ cắt (P) tại hai điểm phân biệt M, N và tập hợp trung điểm I của đoạn MN khi α thay đổi là một Parabol. Viết phương trình của Parabol.

Lời giải



Theo giả thiết ta có $F(2; 0)$, đường thẳng Δ có hệ số góc $k = \tan \alpha$

Suy ra $\Delta: y = (x - 2) \tan \alpha$. Xét hệ phương trình
$$\begin{cases} y = (x - 2) \tan \alpha \\ y^2 = 8x \end{cases}$$

Suy ra $\tan \alpha \cdot y^2 - 8y - 16 \tan \alpha = 0$

$\Delta' = 16 + 16 \tan^2 \alpha > 0$ do đó phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt, hệ phương trình có hai nghiệm phân biệt điều này chứng tỏ rằng Δ cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

Gọi tọa độ hai giao điểm đó là $M(x_M; y_M)$, $N(x_N; y_N)$; $I(x_I; y_I)$ là trung điểm của MN

Theo định lý Viét ta có:

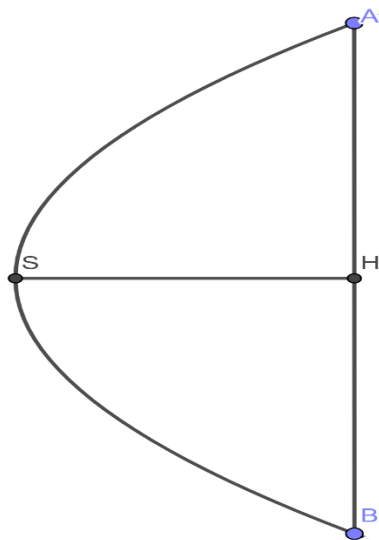
$$y_M + y_N = \frac{8}{\tan \alpha} > 0 \Rightarrow y_I = \frac{y_M + y_N}{2} = \frac{4}{\tan \alpha}.$$

$$\text{Mặt khác từ ta có } y_M + y_N = (x_M + x_N - 4) \tan \alpha \Rightarrow x_I = \frac{x_M + x_N}{2} = \frac{4}{\tan^2 \alpha} + 2$$

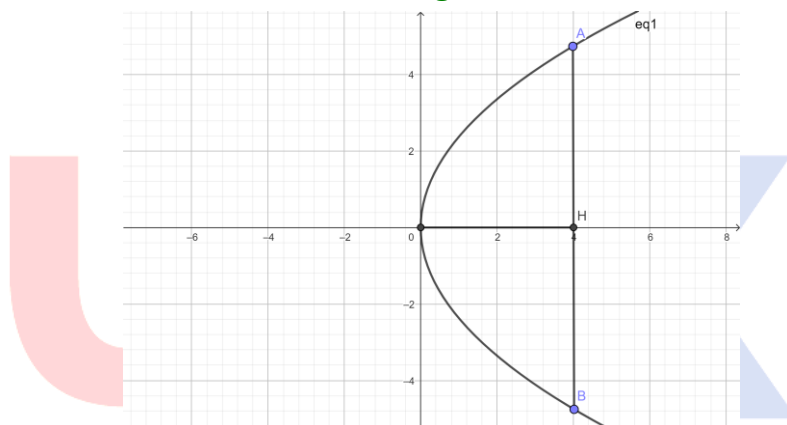
$$\text{Suy ra } x_I = 4 \cdot \left(\frac{y_I}{4} \right)^2 + 2 \text{ hay } y_I^2 = 4x_I - 8$$

Vậy tập hợp điểm I là Parabol có phương trình: $y^2 = 4x - 8$.

Câu 23: Một chiếc cốc nằm ngang, có mặt cắt ngang là hình parabol. Hình parabol có chiều rộng giữa hai mép cốc là $AB = 9\text{cm}$ và chiều sâu $h = 4\text{cm}$ (h bằng khoảng cách từ S đến AB , S là điểm chính giữa đáy cốc. Viết phương trình chính tắc parabol đó.



Lời giải



Gắn Parabol vào hệ tọa độ như hình vẽ. Gốc tọa độ trùng với điểm S

Gọi phương trình chính tắc của parabol (P) là $y^2 = 2px$ ($p > 0$).

Từ giả thiết ta suy ra parabol (P) đi qua điểm $A\left(4; \frac{9}{2}\right)$ nên ta có $\frac{81}{4} = 2p \cdot 4 \Rightarrow p = \frac{81}{32}$.

Vậy trình chính tắc của parabol (P) là $y^2 = \frac{81}{16}x$.

Câu 24: Cho parabol $(P): y^2 = 8x$. Đường thẳng Δ đi qua tiêu điểm F của (P) , vuông góc trục hoành và cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B . Tìm tọa độ điểm A biết tung độ điểm A dương.

Lời giải

Ta có: $(P): y^2 = 8x \Rightarrow p = 4 \Rightarrow F(2; 0)$.

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng Δ là $x = 2$.

Do đó tọa độ điểm A và B thỏa mãn hệ phương trình:
$$\begin{cases} y^2 = 8x \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \\ x = 2 \\ y = 4 \end{cases}.$$

Vì tung độ điểm A dương nên tọa độ điểm A là $A(2;4)$.

Câu 25: Cho parabol $(P): y^2 = x$.

a) Tìm tiêu điểm F , đường chuẩn Δ của (P) .

b) Tìm những điểm trên (P) có khoảng cách tới F bằng 3.

Lời giải

a) Ta có $2p=1$ nên $p=\frac{1}{2}$. Parabol có tiêu điểm $F\left(\frac{1}{4};0\right)$ và đường chuẩn $\Delta: x=-\frac{1}{4}$.

b) Điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc (P) có khoảng cách tới F bằng 3 khi và chỉ khi $y_0^2 = x_0$ và $MF = 3$.

Do $MF = d(M, \Delta)$ nên $d(M, \Delta) = 3$.

Mặt khác $\Delta: x + \frac{1}{4} = 0$ và $x_0 = y_0^2 \geq 0$ nên $3 = d(M, \Delta) = \left|x_0 + \frac{1}{4}\right| = x_0 + \frac{1}{4}$.

Vậy $x_0 = \frac{11}{4}$ và $y_0 = \frac{\sqrt{11}}{2}$ hoặc $y_0 = -\frac{\sqrt{11}}{2}$.

Vậy có hai điểm M thỏa mãn bài toán với tọa độ là $\left(\frac{11}{4}; \frac{\sqrt{11}}{2}\right)$ và $\left(\frac{11}{4}; -\frac{\sqrt{11}}{2}\right)$.

Câu 26: Viết phương trình chính tắc của parabol (P) , biết rằng (P) có đường chuẩn là đường thẳng $\Delta: x+4=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho khoảng cách M đến tiêu điểm của (P) bằng 5.

Lời giải

Phương trình chính tắc của parabol có dạng: $y^2 = 2px, p > 0$.

Đường chuẩn có dạng $x = -\frac{p}{2}$ là đường thẳng $\Delta: x+4=0$ hay $x=-4$. Suy ra $p=8$.

Phương trình chính tắc của parabol có dạng: $y^2 = 16x$.

Tọa độ tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ hay $F(4; 0)$.

Gọi $M(x_0; y_0) \in (P)$ có khoảng cách đến F bằng 5 $\Leftrightarrow y_0^2 = 16x_0$ và $MF = 5$.

Do $MF = d(M, \Delta)$ nên $d(M, \Delta) = 5$.

Hơn nữa, $\Delta: x+4=0$ và $0 \leq y_0^2 = 16x_0$ nên $5 = d(M, \Delta) = |x_0 + 4| = x_0 + 4$.

Vậy $x_0 = 1$ và $y_0 = \pm 4$.

Vậy có 2 điểm thỏa mãn: $M(1; 4)$ và $M(1; -4)$.

Câu 27: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y^2 = 16x$. Tìm một điểm A nằm trên (P) và một điểm B nằm trên đường thẳng $\Delta: 2x - y + 6 = 0$ sao cho AB ngắn nhất.

Lời giải

Với mọi điểm $A \in P$, $B \in \Delta$ ta luôn có $AB \geq d(A; \Delta)$.

Do $A \in P \Rightarrow A\left(\frac{a^2}{16}; a\right)$ với $a \geq 0$, khi đó

$$d(A; \Delta) = \frac{\left|2 \cdot \frac{a^2}{16} - a + 6\right|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|a^2 - 8a + 48|}{8\sqrt{5}} = \frac{|(a-4)^2 + 32|}{8\sqrt{5}} \geq \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

Suy ra AB nhỏ nhất khi và chỉ khi $A(1; 4)$ và B là hình chiếu của A lên Δ .

Đường thẳng đi qua A vuông góc với Δ nhận $\vec{u}(1; 2)$ làm vector pháp tuyến nên có phương trình là $(x-1) + 2(y-4) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 9 = 0$.

Do đó tọa độ điểm B là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x - y + 6 = 0 \\ x + 2y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = -6 \\ x + 2y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{5} \\ y = \frac{24}{5} \end{cases}$

Vậy $A(1; 4)$, $B\left(-\frac{3}{5}; \frac{24}{5}\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 28: Cho parabol $(P): y^2 = x$ và điểm $A(-3; 0)$. Xác định điểm M thuộc parabol (P) sao cho khoảng cách AM là ngắn nhất.

Gọi $M(a^2; a) \in (P)$. Suy ra $\overline{AM} = (a^2 + 3; a)$.

Ta có: $AM^2 = (a^2 + 3)^2 + a^2 = a^4 + 7a^2 + 9 \geq 9$.

AM đạt giá trị nhỏ nhất bằng 3 khi $a = 0$.

Vậy AM đạt giá trị nhỏ nhất khi M ở vị trí $M_0(0; 0)$ khi đó $AM_0 = 3$.

Câu 29: Cho parabol $(P): y^2 = 4x$ và đường thẳng $d: 2x - y - 4 = 0$. Gọi A, B là giao điểm của d và (P) . Tìm tung độ dương của điểm $C \in (P)$ sao cho ΔABC có diện tích bằng 12.

Lời giải

Ta có: d cắt (P) tại $A(4;4); B(1;-2)$.

$$C \in (P) \Rightarrow C(c^2; 2c)$$

$$\overrightarrow{AC} = (c^2 - 4; 2c - 4)$$

$$\overrightarrow{BC} = (c^2 - 1; 2c + 2)$$

$$\text{Diện tích tam giác } ABC: S_{ABC} = \frac{1}{2} d(C, AB).AB = \frac{1}{2} 3\sqrt{5} \cdot \frac{|2c^2 - 2c - 4|}{\sqrt{5}} = \frac{3}{2} |2c^2 - 2c - 4|$$

Theo giả thiết, $S_{ABC} = 12 \Rightarrow |6c^2 - 6c - 12| = 24 \Rightarrow \begin{cases} c = -2 \\ c = 3 \end{cases}$.

Vậy tung độ của điểm C dương là 6.

Câu 30: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho Parabol $(P): y^2 = 4x$. Tìm trên (P) điểm M khác gốc tọa độ sao cho khoảng cách từ M đến trục tung gấp hai lần khoảng cách từ M đến trục hoành.

Lời giải

Gọi tọa độ điểm $M = (x; y)$.

Do M thuộc (P) nên $y^2 = 4x \Rightarrow x \geq 0$.

Từ giả thiết M khác gốc tọa độ và khoảng cách từ M đến trục tung gấp hai lần khoảng cách từ M đến trục hoành, ta có: $|x| = 2|y| \neq 0$.

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ |x| = 2|y| \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = \pm 8 \end{cases}.$$

Vậy tọa độ điểm M là $(16;8)$ và $(16;-8)$.

Câu 31: Cho Parabol $y^2 = x$. Tìm hai điểm N, K trên Parabol (P) sao cho tam giác ONK là tam giác đều ($y_N < y_K$).

Lời giải

$$N, K \in (P) \Rightarrow y_N^2 = x_N > 0; y_K^2 = x_K > 0.$$

$$ON^2 = OK^2 \Rightarrow x_N^2 + y_N^2 = x_K^2 + y_K^2 \Rightarrow x_N^2 + x_N = x_K^2 + x_K$$

$$\Rightarrow (x_N - x_K)(x_N + x_K + 1) = 0 \Rightarrow x_N = x_K.$$

$\Rightarrow N, K$ đối xứng qua Ox .

Gọi H là trung điểm NK .

Tam giác ONK đều nên $OH = OK \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x_K = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{x_K^2 + y_K^2} \Leftrightarrow x_K = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{x_K^2 + x_K} \Rightarrow x_K = 3$.

Do đó $N(3; -\sqrt{3}), K(3; \sqrt{3})$.

Câu 32: Trong mặt phẳng Oxy , cho Parabol $(P): y^2 = 4x$ và đường thẳng $d: -2x + y + 12 = 0$. Gọi giao điểm của d và (P) là A, B . Tìm tọa độ điểm C nằm trên (P) sao cho tam giác ABC vuông tại C .

Lời giải

Ta có $(d): y = \frac{1}{2}x + 6$.

Tọa độ giao điểm $A(9; 6), B(4; -4)$.

Gọi $C\left(\frac{1}{4}c^2; c\right) \in (P)$ với $(c \neq 6, c \neq -4)$ là điểm cần tìm.

Ta có $AB^2 = 125; AC^2 = \left(\frac{1}{4}c^2 - 9\right)^2 + (c - 6)^2 = \frac{1}{16}c^4 - \frac{7}{2}c^2 - 12c + 117$;

$BC^2 = \left(\frac{1}{4}c^2 - 4\right)^2 + (c + 4)^2 = \frac{1}{16}c^4 - c^2 + 8c + 32$

Tam giác ABC vuông tại C khi và chỉ khi

$AB^2 = AC^2 + BC^2 \Leftrightarrow 125 = \frac{1}{16}c^4 - \frac{7}{2}c^2 - 12c + 117 + \frac{1}{16}c^4 - c^2 + 8c + 32$

$\Leftrightarrow \frac{1}{8}c^4 - \frac{9}{2}c^2 - 4c + 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ c = -4 (l) \\ c = 6 (l) \end{cases}$

Vậy $C(2; 1)$ là điểm thỏa đề bài.

Câu 33: Cho Parabol $y^2 = x$ và đường thẳng $(d): -x + y + 2 = 0$.

Gọi A, B là các giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol (P) ($y_A < y_B$). Tìm điểm M trên cung AB của Parabol (P) sao cho tổng diện tích hai phần hình phẳng giới hạn bởi (P) và hai dây MA, MB là nhỏ nhất.

Lời giải

Dễ thấy tọa các giao điểm A, B của đường thẳng (d) và Parabol (P) có tọa độ: $A(1; -1); B(4; 2)$.

$M \in AB$ của (P) nên tọa độ $M(x_0^2; x_0)$ với $-1 \leq x_0 \leq 2$.

Tổng diện tích hai phần hình phẳng giới hạn bởi (P) và hai dây MA, MB nhỏ nhất khi và chỉ khi diện tích ΔMAB lớn nhất $\Leftrightarrow d(M, AB)$ lớn nhất.

$$d(M, AB) = \frac{|-x_0^2 + x_0 + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|(x_0 + 1)(2 - x_0)|}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Mà } -1 \leq x_0 \leq 2 \Rightarrow x_0 + 2 \geq 0; 2 - x_0 \geq 0$$

$$\Rightarrow d(M, AB) = \frac{(x_0 + 1)(2 - x_0)}{\sqrt{2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{x_0 + 1 + 2 - x_0}{2} \right)^2 = \frac{9\sqrt{2}}{8}.$$

$$d(M, AB) = \frac{9\sqrt{2}}{8} \Leftrightarrow x_0 + 1 = 2 - x_0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right).$$

Câu 34: Phương trình chính tắc của parabol (P) biết (P) cắt đường thẳng $\Delta: 3x - y = 0$ tại 2 điểm $A; B$ sao cho $AB = 4\sqrt{2}$ là

Lời giải

Gọi phương trình chính tắc của parabol (P) là: $y^2 = 2px, p > 0$.

Ta thấy (P) luôn cắt đường thẳng Δ tại gốc tọa độ, giả sử $B \equiv O$ và A là giao điểm còn lại.

Ta có: $A \in \Delta \Rightarrow A(a; 3a)$.

Mặt khác:

$$AB = 4\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{a^2 + 9a^2} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow a^2 = \frac{16}{5} \Rightarrow a = \pm \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Nếu } a = \frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow \left(3 \cdot \frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 = 2p \frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow p = \frac{18}{\sqrt{5}} \Rightarrow (P): y^2 = \frac{36}{\sqrt{5}}x.$$

$$\text{Nếu } a = -\frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow \left(3 \cdot \frac{-4}{\sqrt{5}}\right)^2 = 2p \left(\frac{-4}{\sqrt{5}}\right) \text{ không thỏa mãn điều kiện.}$$

Câu 35: Trong mặt phẳng Oxy, cho parabol $(P): y^2 = 2x$ có tiêu điểm F . Trên (P) lấy điểm M và gọi điểm đối xứng của M qua trục hoành là N . Tìm tung độ của điểm M để tam giác FMN là tam giác đều biết M có tung độ dương.

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{p}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Giả sử } M\left(\frac{m^2}{2}; m\right) \text{ với } m > 0. \text{ Suy ra } MF = \frac{m^2}{2} + \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vì tam giác } FMN \text{ đều nên } |y_M| = MF \cdot \sin 30^\circ \Leftrightarrow m = \left(\frac{m^2}{2} + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2} \Leftrightarrow m^2 - 4m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Câu 36: Một tàu vũ trụ nằm trong một quỹ đạo tròn và ở độ cao 148km so với bề mặt Trái Đất. Sau khi đạt được vận tốc cần thiết để thoát khỏi lực hấp dẫn của Trái Đất, tàu vũ trụ sẽ đi theo quỹ đạo parabol với tâm Trái Đất là tiêu điểm; điểm khởi đầu của quỹ đạo này là đỉnh parabol quỹ đạo.

- Viết phương trình chính tắc parabol quỹ đạo.
- Giải thích vì sao, kể từ khi đi vào quỹ đạo parabol, càng ngày, tàu vũ trụ càng xa Trái Đất.

Lời giải

a. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , với 1 đơn vị đo trong mặt phẳng tọa độ tương ứng với 1km trên thực tế và gốc tọa độ O trùng với đỉnh của parabol.

Gọi phương trình chính tắc của parabol (P) là $y^2 = 2px$, trong đó $p > 0$ là tham số tiêu.

Vì tàu vũ trụ nằm trong một quỹ đạo tròn và ở độ cao 148km so với bề mặt Trái Đất đồng thời bán kính Trái Đất là 6371km nên parabol (P) có tiêu điểm là $F(6519;0)$.

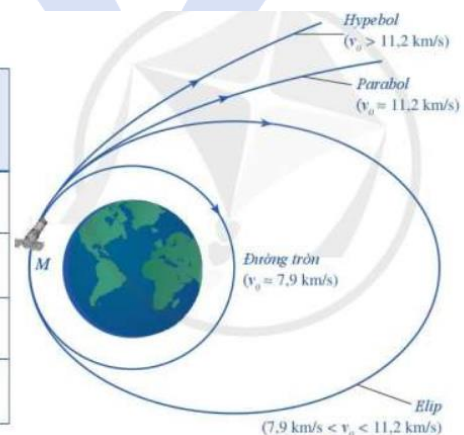
Khi đó $\frac{p}{2} = 6519 \Rightarrow p = 13038$. Vậy phương trình chính tắc của (P) là $y^2 = 26076x$.

b. Giả sử con tàu vũ trụ có tọa độ $M(x; y)$. Khi đó, theo công thức bán kính qua tiêu, ta có

$MF = x + \frac{p}{2}$. Đây cũng là khoảng cách từ tàu vũ trụ đến tâm Trái Đất.

Kể từ khi con tàu đi vào quỹ đạo parabol, hoành độ x của con tàu ngày càng tăng, do đó con tàu ngày càng xa Trái Đất.

Tốc độ v_0 của tàu vũ trụ	Hình dạng quỹ đạo của tàu vũ trụ
7,9 km/s	Đường tròn
$7,9 \text{ km/s} < v_0 < 11,2 \text{ km/s}$	Elip
11,2 km/s	Một phần của parabol
$v_0 > 11,2 \text{ km/s}$	Một phần của hypebol

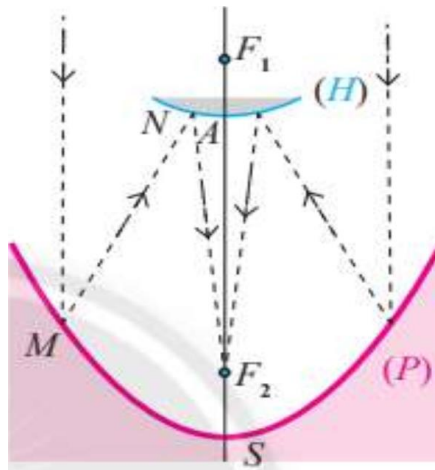


Một ứng dụng thú vị của các đường Conic liên quan đến quỹ đạo của các sao chổi trong hệ mặt trời của chúng ta. Trong số 610 sao chổi được biết trước năm 1970, trong đó có 245 sao chổi có quỹ đạo là đường elip, 295 sao chổi có quỹ đạo là đường parabol và 70 sao chổi có quỹ đạo là đường hyperbol. Tâm của mặt trời là tiêu điểm của mỗi quỹ đạo và mỗi quỹ đạo có đỉnh là điểm mà ở đó sao chổi gần mặt trời nhất. Chắc chắn là đã có nhiều sao chổi có quỹ đạo parabol hay hyperbol đã không được biết tới. Chúng ta chỉ nhìn thấy các sao chổi như thế có một lần. Những sao chổi có quỹ đạo elip, chẳng hạn sao chổi Halley, là ngôi sao còn tồn tại duy nhất trong hệ mặt trời của chúng ta.



Để theo dõi các con tàu thám hiểm không gian quan sát các hành tinh ngoài hệ mặt trời, cơ quan nghiên cứu vũ trụ NASA sử dụng các gương phản xạ parabol lớn với đường kính bằng hai phần ba chiều dài của một sân bóng đá. Không cần phải nói, ta cũng biết rằng nhiều bài toán thiết kế được đặt ra so sức nặng của các gương phản xạ này. Một bài toán về trọng lượng đã được giải quyết bằng cách sử dụng một gương phản xạ hyperbol có cùng tiêu điểm với gương parabol để phản xạ các sóng điện từ tới tiêu điểm còn lại của hyperbol mà tại đó có lắp đặt thiết bị thu tín hiệu.

Cho biết $SF_1 = 14m$, $SF_2 = 2m$ và $AF_1 = 1m$. Viết phương trình chính tắc của (P) và (H) .



phương trình chính tắc của hypebol (H) cần tìm là $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{11}$

Theo giả thiết $SF_1 = 14m$, suy ra $\frac{p}{2} = 14 \Rightarrow p = 28$.

Phương trình chính tắc của hypebol (H) là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > 0, b > 0$.

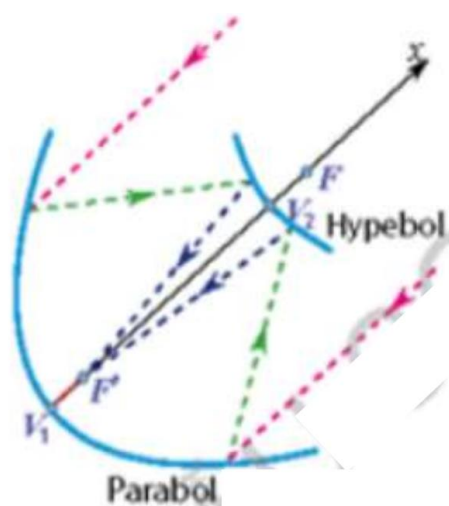
Từ đó tìm được $\begin{cases} a=5 \\ c=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=25 \\ a^2+b^2=36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=25 \\ b^2=11 \end{cases}.$

Kết luận: Vậy phương trình chính tắc của hypebol (H) cần tìm là $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{11} = 1$.

Câu 38: Một số loại kính thiên văn sử dụng kết hợp cả gương parabol và gương hypebol để thu nhận tín hiệu. Hình dưới đây mô tả mặt cắt của kính thiên văn Cassegrain “cổ điển” gồm một parabol và hypebol có cùng tiêu điểm F . Chùm tín hiệu song song với Ox đến gặp parabol sẽ phản xạ đến tiêu điểm F . Chùm tia phản xạ này khi gặp gương hypebol đặt trước tiêu điểm F sẽ hội tụ đến tiêu điểm F' còn lại của hypebol, cũng là nơi đặt bộ thu tín hiệu của kính thiên văn.



Hình ảnh: Kính thiên văn Cassergrain.



Hình ảnh: Đài quan sát thiên văn vô tuyến.

Cho biết tiêu cự của hypebol là $10m$ và khoảng cách từ vị trí đặt bộ thu đến đỉnh V_1 của parabol và đỉnh V_2 của hypebol lần lượt là $F'V_1 = 1,8m$ và $F'V_2 = 8,2m$. Hãy viết phương trình chính tắc của parabol và hypebol nói trên.

Lời giải

Gọi phương trình chính tắc của parabol (P) là $y^2 = 2px$, trong đó $p > 0$ là tham số tiêu.

Ta có $FV_1 = F'V_1 + EF' = 1,8 + 10 = 11,8m$. Khi đó $\frac{p}{2} = 1,8 \Rightarrow p = 3,6$.

Kết luận: Vậy phương trình chính tắc của parabol (P) là $y^2 = 7,2x$.

Phương trình chính tắc của hypebol (H) là: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > 0, b > 0$.

Theo giả thiết tiêu cự của hypebol là $10m$ nên $2c = 10 \Rightarrow c = 5$. Khi đó $a^2 + b^2 = c^2 = 25$.

Mặt khác $F'V_2 = 8,2m \Rightarrow a + c = 8,2 \Rightarrow a + 5 = 8,2 \Rightarrow a = 3,2$.

Khi đó $a^2 = 10,24$ và $b^2 = 14,76$. Phương trình của hypebol (H) là $\frac{x^2}{10,24} - \frac{y^2}{14,76} = 1$.