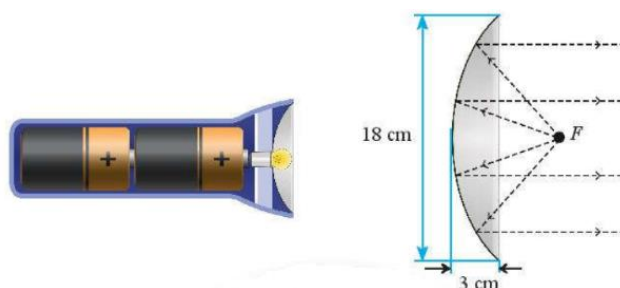


PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG

TỔNG HỢP VỀ BA ĐƯỜNG CÔN IC

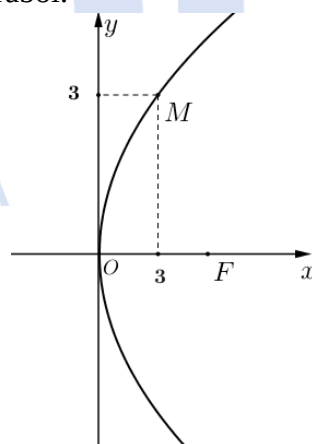
Câu 1: Một đèn pin có chóa đèn mặt cắt hình parabol với kính thước trong hình trên. Giấy tóc bóng đèn được đặt ở tiêu điểm F .



Để đèn chiếu được xa phải đặt bóng đèn cách đỉnh của chóa đèn bao nhiêu xentimét?

Lời giải

Viết phương trình chính tắc của parabol.



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Gọi phương trình chính tắc của parabol (P) là $y^2 = 2px$ ($p > 0$).

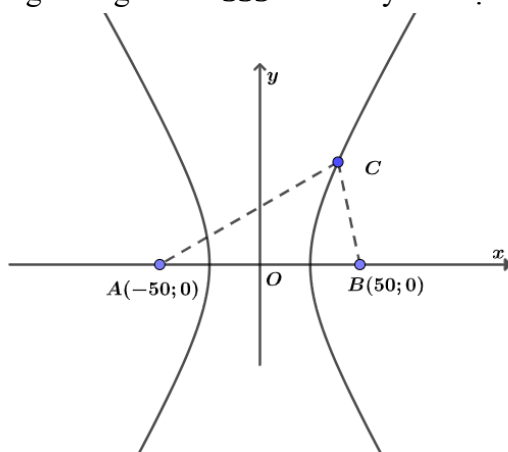
Khi đó, $M(3;9) \in (P) \Rightarrow 9^2 = 2.p.3 \Leftrightarrow p = \frac{81}{6}$.

Vậy phương trình $(P): y^2 = \frac{81}{3}x$.

Parabol $(P): y^2 = \frac{81}{3}x$ có tiêu điểm $F\left(\frac{81}{12}; 0\right)$.

Để đèn chiếu được xa phải đặt bóng đèn ở vị trí tiêu điểm, khi đó các tia sáng phát ra từ bóng đèn chiếu lên bề mặt của chóa đèn sẽ phản xạ tạo nên các tia sáng song song hoặc trùng với trục của parabol.

Câu 2: Hệ thống định vị một vị trí cần có 3 bộ phận cơ bản: Thứ nhất là bộ phận không gian để phát sóng; thứ hai là bộ phận trung tâm điều khiển; thứ 3 là bộ phận thu sóng. Người ta sử dụng tính chất giao nhau của hai đường hypebol để định vị. Hai máy phát tín hiệu A, B cách nhau 100km truyền tín hiệu đến vị trí C . Tại C , tín hiệu nhận được từ B sớm hơn 2s so với A . Biết vận tốc truyền tín hiệu trong không khí là 335 m/s. Hãy xác định vị trí có thể của điểm C .


$$\text{Vậy } C \in (H): \frac{x^2}{0.112225} - \frac{y^2}{2500} = 1 \text{ và } x > 0.$$
$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Gọi (H) : $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Tiêu điểm của gương là $F_1(-5;0)$ và $F_2(5;0)$.

Đỉnh của gương là $A_1(-4;0)$.

Vậy khoảng cách từ tâm của máy ảnh tới đỉnh của gương là $F_2A_1 = \sqrt{(-4-5)^2} = 9$.

Câu 4: Khúc cua của một con đường có dạng hình parabol, điểm đầu vào khúc cua là A, điểm cuối là B, khoảng cách $AB = 400\text{m}$. Đỉnh parabol của khúc cua cách đường thẳng AB một khoảng 20 m và cách đều A, B.

- Lập phương trình chính tắc của, với 1 đơn vị đo trong mặt phẳng tọa độ tương ứng 1 m trên thực tế.
- Lập phương trình chính tắc của, với 1 đơn vị đo trong mặt phẳng tọa độ tương ứng 1 km trên thực tế.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ sao cho đỉnh của Parabol trùng với gốc tọa độ O

a) Nếu một đơn vị đo trong mp tọa độ tương ứng với 1m trên thực tế thì tọa độ các điểm là A B thuộc Parabol có dạng

$$y^2 = 2px$$

Thay tọa độ điểm A vào ta có $200^2 = 2p \cdot 20 \Rightarrow 2p = 2000$

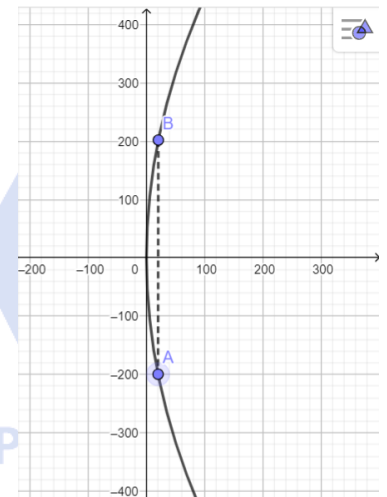
Vậy có phương trình $y^2 = 2000x$

b) Nếu một đơn vị đo trong mp tọa độ tương ứng với 1km trên thực tế thì tọa độ các điểm là A B thuộc Parabol có dạng

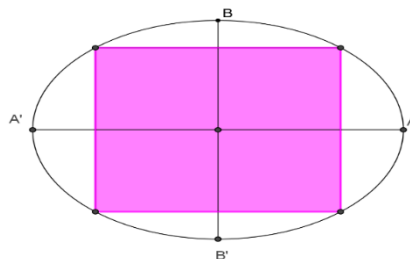
$$y^2 = 2px$$

Thay tọa độ điểm A vào ta có $0,2^2 = 2p \cdot 0,02 \Rightarrow 2p = 2$

Vậy có phương trình $y^2 = 2x$



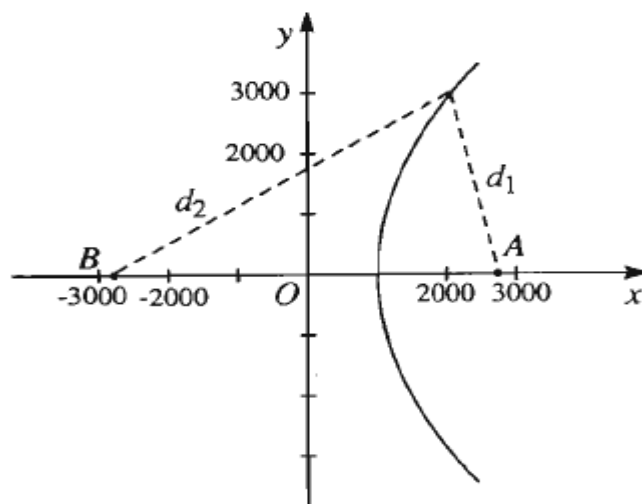
Câu 5: Bên trong một sân vườn hình Elip có độ dài trục lớn bằng 12 m, độ dài trục bé bằng 9 m. người ta rào thành một hình chữ nhật nội tiếp Elip như hình vẽ để trồng hoa, phần còn lại để trồng cỏ. Tính diện tích trồng hoa lớn nhất.



Lời giải

Phương trình chính tắc của (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Ta có: $2a = 12 \Rightarrow a = 6, 2b = 9 \Rightarrow b = 4,5$.



Kí hiệu d_1 là quãng đường âm thanh đi được từ vụ nổ đến thiết bị A, d_2 là quãng đường âm thanh đi được từ vụ nổ đến thiết bị B, d_1 và d_2 tính theo feet. Khi đó, do thiết bị A nhận âm thanh nhanh hơn thiết bị B là 2 giây nên ta có phương trình:

$$d_2 - d_1 = 2200 \quad (1)$$

Các điểm thỏa mãn (1) nằm trên một nhánh của Hypebol có phương trình:

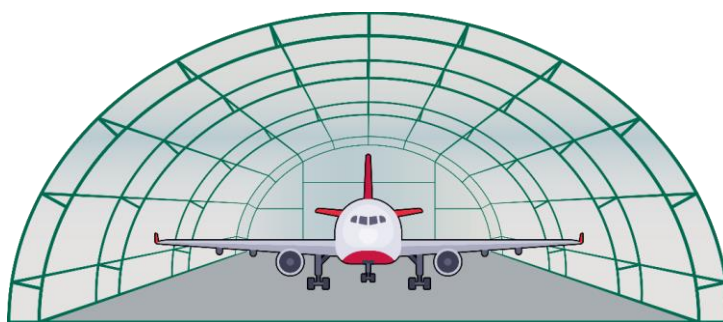
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ta có $c = \frac{5280}{2} = 2640$, $a = \frac{2200}{2} = 1100$, $b^2 = c^2 - a^2 = 5759600$,

Vậy vụ nổ nằm trên một nhánh của Hypebol có phương trình: $\frac{x^2}{1210000} - \frac{y^2}{5759600} = 1$.

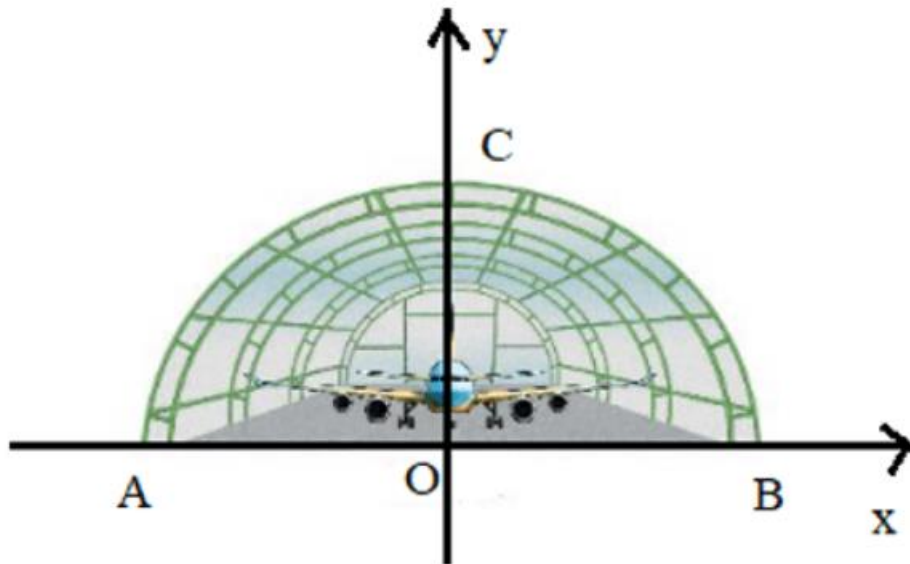
Câu 8: Một nhà vòm chứa máy bay có mặt cắt hình nửa elip cao $10m$, rộng $24m$.

- Chọn hệ toạ độ thích hợp và viết phương trình của elip nói trên.
- Tính khoảng cách theo phương thẳng đứng từ một điểm cách chân tường $4m$ lên đến nóc nhà vòm.



Lời giải

- Chọn hệ toạ độ thích hợp và viết phương trình của elip nói trên.
Đặt hệ trục toạ độ như sau:



Ta thấy AB là độ dài trục lớn của elip nên $2a = 24 \Leftrightarrow a = 12$

OC là một nửa trục bé nên $b = 10$

Khi đó phương trình của elip trên là: $\frac{x^2}{12^2} + \frac{y^2}{10^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{100} = 1 (*)$

Vậy phương trình elip đã cho là $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{100} = 1$.

b) Tính khoảng cách theo phương thẳng đứng từ một điểm cách chân tường 4m lên đến nóc nhà vòm.

Gọi điểm D là điểm nằm trên elip và cách chân tường 4m.

Khi đó khoảng cách từ D đến gốc tọa độ O là $12 - 4 = 8$ m.

Gọi $D(8; y_D)$

Vì D thuộc elip trên nên tọa độ điểm D thỏa mãn phương trình, ta có:

$$\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{100} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{y_D^2}{100} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow y_D^2 = \frac{500}{9} \Leftrightarrow y_D = \frac{10\sqrt{5}}{3} \Rightarrow D(8; \frac{10\sqrt{5}}{3})$$

Suy ra khoảng cách theo phương thẳng đứng từ một điểm cách chân tường 4m đến nóc nhà là

tung độ của điểm D là $\frac{10\sqrt{5}}{3}$ (m).

Vậy khoảng cách theo phương thẳng đứng từ một điểm cách chân tường 4m đến nóc nhà là

$$\frac{10\sqrt{5}}{3}(\text{m}).$$

Câu 9: Khúc cua của một con đường có dạng hình parabol, điểm đầu vào khúc cua là A điểm cuối là B , khoảng cách $AB = 400$ m. Đỉnh parabol của khúc cua cách đường thẳng AB một khoảng 20m và cách đều A, B . Lập phương trình chính tắc của, với 1 đơn vị đo trong mặt phẳng tọa độ tương ứng 1 m trên thực tế.

Lời giải

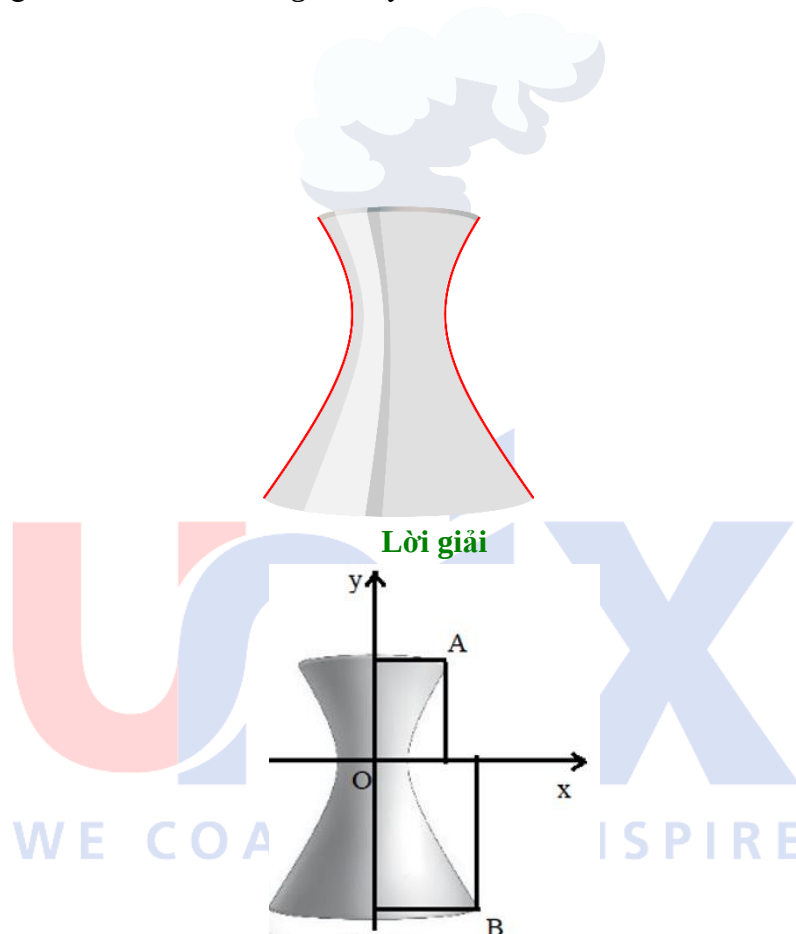
Phương trình chính tắc: $y^2 = 2px$

Theo đề ta có A, B, O .

Do đi qua A nên suy ra $20^2 = 2p = -400 \Rightarrow p = -1$.

Vậy: $y^2 = -2x$.

- Câu 10:** Một tháp làm nguội của một nhà máy có mặt cắt là hình hypebol có phương trình $\frac{x^2}{64^2} - \frac{y^2}{35^2} = 1$. Biết chiều cao của tháp là 210 m và khoảng cách từ nóc tháp đến tâm tối xứng của hypebol bằng một nửa khoảng cách từ tâm đối xứng tới đáy. Tính bán kính nóc và bán kính đáy của tháp.



Gọi hai điểm A, B như hình vẽ.

Gọi khoảng cách từ nóc tháp đến tâm đối xứng của hypebol là h

Khi đó khoảng cách từ đáy tháp đến tâm đối xứng của hypebol là $2h$

$$h + 2h = 210 \Rightarrow h = 70 \text{ (m)}$$

Tung độ của điểm A chính bằng khoảng cách từ nóc tháp tới tâm đối xứng của hypebol nên $y_A = 70$

Điểm A nằm trên hypebol nên tọa độ điểm A thỏa mãn phương trình $\frac{x^2}{64^2} - \frac{y^2}{35^2} = 1$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{64^2} - \frac{70^2}{35^2} = 1 \Rightarrow x_A = 64\sqrt{5}$$

Vậy bán kính của nóc tháp là $64\sqrt{5} \text{ (m)}$

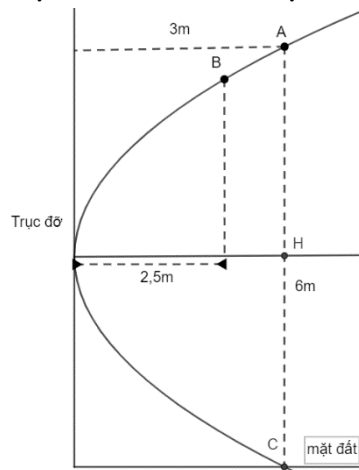
Tung độ của điểm B chính bằng khoảng cách từ đáy tháp tới tâm đối xứng của hypebol nên $y_B = 70.2 = 140$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{64^2} - \frac{140^2}{35^2} = 1 \Rightarrow x_B = 64\sqrt{17}$$

A diagram showing a satellite in a curved path between two ground stations, A and B. The ground stations are represented by antennas on a wavy line representing the horizon. The distance between A and B is labeled as 650 km. The satellite is shown as a small object with a tail, moving along a curved path that starts at A, goes up and around, and then comes back down towards B. The path is labeled with 'P' at the start and end points. The background is a light blue sky and a green ground area.

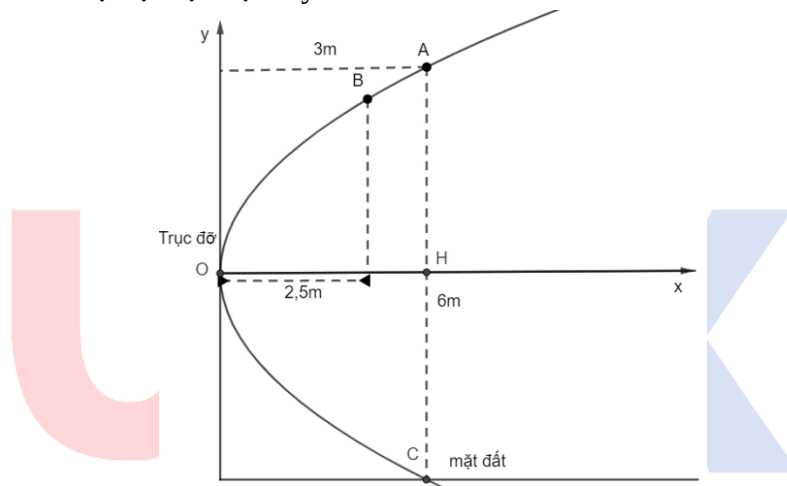
8 | **Ths. Lê Việt – THPT Thăng Long, Hà Nội – Phone: 0835221183 - Ôn thi cam kết điểm số**

Câu 12: Để nâng đỡ các ống trượt cong có hình là các Parabol thì nhà thầu thi công gia cố các trục đỡ vuông góc với mặt đất. Hình bên dưới mô tả trục đỡ và 1 phần ống trượt với khoảng cách A đến mặt đất là 6m, đến trục đỡ là 3m. Tính độ cao từ mặt đất tới điểm B trong hình



Lời giải

Vẽ lại hình và thêm hệ trục tọa độ Oxy



Dễ thấy $AH \perp Ox$ và H là trung điểm của AC nên suy ra $AH = CH = \frac{1}{2} AC = 3 \Rightarrow A(3; 3)$.

Điểm $A(3; 3) \in (P) \Rightarrow 3 = 2p3^2 \Leftrightarrow p = \frac{1}{6}$

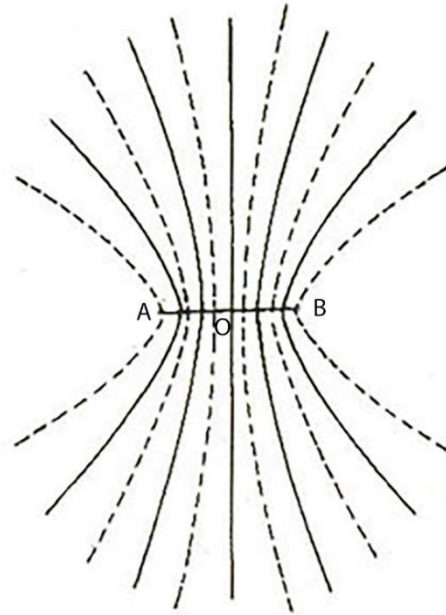
□ Phương trình chính tắc $y = \frac{1}{3}x^2$

Ta thấy độ cao từ điểm B tới mặt đất bằng khoảng cách từ B tới Ox và đoạn CH

* Khoảng cách từ B đến đoạn Ox là tung độ $y_B = \frac{1}{3}(2,5)^2 = \frac{25}{12}$ m

$\Rightarrow$ Khoảng cách từ B đến mặt đất là $\frac{25}{12} + 3 = \frac{61}{12}$ m

Câu 13: Các đường cong hình bên mô tả hiện tượng giao thoa khi hai sóng gặp nhau, với các đường cong tạo thành được gọi là các vân giao thoa có hình dạng là các đường Hypebol. Hãy lập phương trình đường Hypebol của 2 vân giao thoa ngoài cùng đi qua A và B như hình vẽ, biết $AB = 24$, đường Hypebol có tiêu cự bằng 13.



Lời giải

Phương trình Hypebol có dạng $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ và $a, b > 0$

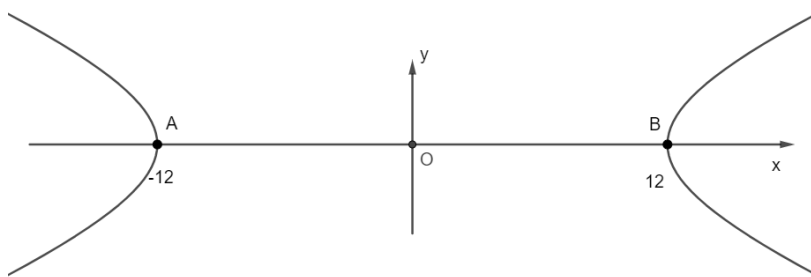
Đường cong Hypebol đi qua 2 điểm A, B và $AB = 24$

$$\square A(-12; 0) \text{ và } B(12; 0) \in (H) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\square \frac{12^2}{a^2} - \frac{0^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{12^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow a^2 = 12^2 \Rightarrow a = 12 (a > 0)$$

$$\text{Ta có } b^2 = c^2 - a^2 = 13^2 - 12^2 = 25$$

$$\text{Vậy Hypebol có dạng } \frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$$



Câu 14: Ta biết rằng Mặt Trăng chuyển động quanh trái đất theo một quỹ đạo là một elip mà Trái Đất là một tiêu điểm. Elip đó có chiều dài trục lớn và trục nhỏ lần lượt là 769266 km và 768106 km. Tính khoảng cách lớn nhất từ Trái Đất đến Mặt Trăng.

Lời giải

$$\text{Gọi phương trình của elip là } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$\text{Theo giả thiết, } 2a = 769266 \Rightarrow a = 384633; 2b = 768106 \Rightarrow b = 384053.$$

$$\text{Vậy } c = \sqrt{a^2 - b^2} = 21115.$$

$$\text{Khoảng cách lớn nhất từ Trái Đất đến Mặt Trăng bằng } a + c = 405748.$$

Câu 15: Mặt Trăng và các vệ tinh của Trái Đất chuyển động theo quỹ đạo là các đường elip mà tâm Trái Đất là một tiêu điểm. Biết độ dài trục lớn và độ dài trục bé của quỹ đạo Mặt Trăng là 768796 km và 767726 km. Tính khoảng cách lớn nhất và khoảng cách bé nhất giữa tâm Trái Đất và tâm Mặt Trăng.

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} 2a = 768796 \\ 2b = 767726 \\ c = 20274 \end{cases}$$

Gọi $M(x; y)$ thuộc elip suy ra $MF_1 = a + ex$.

Do $-a \leq x \leq a$

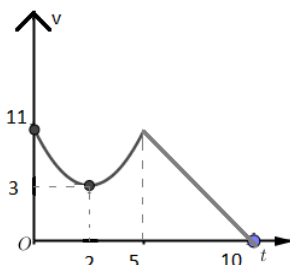
$$\Leftrightarrow a - ea \leq MF_1 \leq a + ea$$

$$\Leftrightarrow 384398 - 20274 \leq MF_1 \leq 384398 + 20274$$

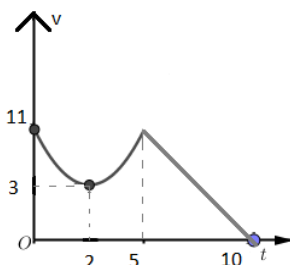
$$\Leftrightarrow 364124 \leq MF_1 \leq 404672.$$

Vậy khoảng cách lớn nhất và khoảng cách bé nhất giữa tâm Trái Đất và tâm Mặt Trăng là 404672 km và 364124 km.

Câu 16: Chất điểm chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t)$ (m/s) có dạng đường Parabol khi $0 \leq t \leq 5$ (s) và $v(t)$ có dạng đường thẳng khi $5 \leq t \leq 10$ (s). Cho đỉnh Parabol là $I(2;3)$ như hình vẽ. Viết phương trình quãng đường đi của chất điểm trong thời gian $0 \leq t \leq 10$ (s) ?



Lời giải



Gọi Parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ khi $0 \leq t \leq 5$ (s).

$$\text{Do } (P): y = ax^2 + bx + c \text{ đi qua } I(2;3), A(0;11) \text{ nên } \begin{cases} 4a + 2b + c = 3 \\ c = 11 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -8 \\ c = 11 \end{cases}$$

Khi đó phương trình quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ $0 \leq t \leq 5(s)$ là

$$S(x) = 2x^2 - 8x + 11$$

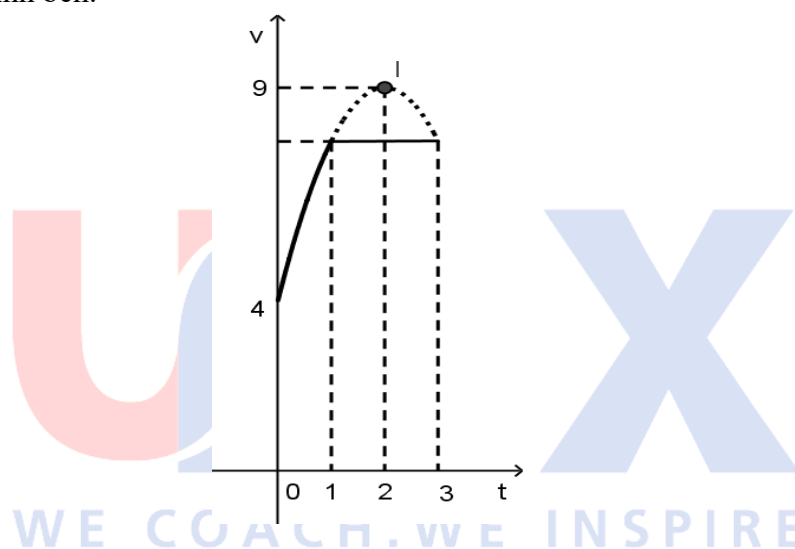
Gọi $d: y = mx + n$ khi $5 \leq t \leq 10(s)$ do d đi qua điểm $B(5; 21)$ và $C(10; 0)$ nên:

$$\begin{cases} 5m + n = 21 \\ 10m + n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -\frac{21}{5} \\ n = 42 \end{cases}$$

Khi đó phương trình vật di chuyển trong khoảng thời gian từ $5 \leq t \leq 10(s)$ là

$$T(x) = -\frac{21}{5}x + 42.$$

Câu 17: Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị vận tốc như hình bên.



Trong thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2; 9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Viết phương trình vận tốc mà vật chuyển động được trong 3 giờ đó.

Lời giải

Gọi phương trình của parabol $v = at^2 + bt + c$ ta có hệ như sau:

$$\begin{cases} c = 4 \\ 4a + 2b + c = 9 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 \\ c = 4 \\ a = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

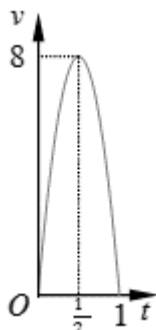
Phương trình vận tốc mà vật chuyển động được trong 1 giờ đầu là:

$$v_1 = -\frac{5}{4}t^2 + 5t + 4.$$

Phương trình vận tốc mà vật chuyển động được trong 2 giờ tiếp theo là:

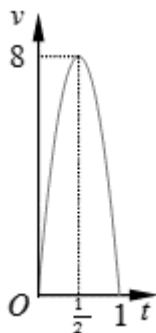
Với $t=1$, ta có $v_2 = \frac{31}{4}$.

Câu 18: Một người chạy trong thời gian 1 giờ, vận tốc v phụ thuộc vào thời gian t có đồ thị là một phần parabol với đỉnh $I\left(\frac{1}{2}; 8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên dưới.



Viết phương trình vận tốc mà người đó chạy được trong khoảng thời gian 45 phút kể từ khi chạy.

Lời giải



Gọi parabol là $(P): y = ax^2 + bx + c$. Từ hình vẽ ta có (P) đi qua $O(0; 0)$, $A(1; 0)$ và điểm

$$I\left(\frac{1}{2}; 8\right), \text{ ta có hệ: } \begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -32 \\ b = 32 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Suy ra $(P): y = -32x^2 + 32x$.

Phương trình vận tốc mà người đó chạy được trong khoảng thời gian 45 phút kể từ khi chạy:

$$y = -32x^2 + 32x.$$

Câu 19: Quỹ đạo chuyển động của sao chổi Halley là một elip, nhận tâm mặt trời là một tiêu điểm, có tâm sai bằng 0,967. Biết khoảng cách gần nhất từ sao chổi Halley đến tâm mặt trời là khoảng 88.10^6 km, tính khoảng cách xa nhất.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho tâm mặt trời trùng với tiêu điểm F_1 của elip, đơn vị trên các trục là triệu km.

Gọi phương trình chính tắc của quỹ đạo elip là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > b > 0)$.

Gọi tọa độ của sao chổi Halley là $M(x; y)$.

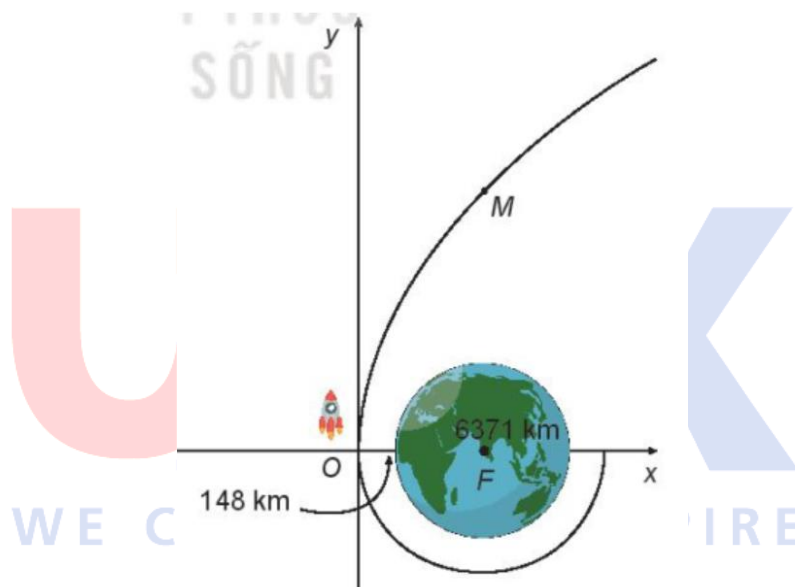
Ta có $MF_1 = a + \frac{c}{a}x$. Vì $-a \leq x \leq a$ nên $a - c \leq MF_1 \leq a + c$.

Do đó khoảng cách gần nhất từ sao chổi Halley đến tâm mặt trời là $a - c$.

Theo đề bài thì $a - c = 88$. Và $e = \frac{c}{a} = 0,967$. Giải ra $a = \frac{8000}{3}$, $c = \frac{7736}{3}$.

Khoảng cách xa nhất từ sao chổi Halley đến tâm mặt trời bằng $a + c = \frac{15736}{3}$ triệu km hay ≈ 5245333333 km.

Câu 20: Một tàu vũ trụ nằm trong một quỹ đạo tròn và ở độ cao 148 km so với bề mặt Trái Đất.



Sau khi đạt được vận tốc cần thiết để thoát khỏi lực hấp dẫn của Trái Đất, tàu vũ trụ sẽ đi theo quỹ đạo parabol với tâm Trái Đất là tiêu điểm; điểm khởi đầu của quỹ đạo này là đỉnh parabol quỹ đạo.

- Viết phương trình chính tắc của parabol quỹ đạo.
- Giải thích vì sao, kể từ khi đi vào quỹ đạo parabol, càng ngày, tàu vũ trụ càng cách xa Trái Đất.

Lời giải

a) Gọi phương trình chính tắc của parabol quỹ đạo là $y^2 = 2px \ (p > 0)$.

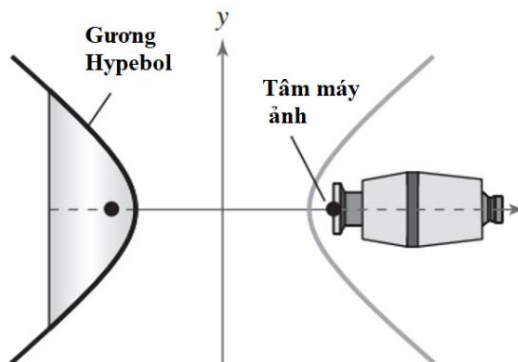
Nhìn hình vẽ ta thấy $OF = 148 + 6371 = 6519$

$$\Rightarrow \frac{p}{2} = 6519 \Rightarrow p = 13038.$$

Suy ra phương trình chính tắc của parabol quỹ đạo là $y^2 = 26076x$.

Khi đó theo công thức bán kính qua tiêu ta có $MF = x + \frac{p}{2}$.

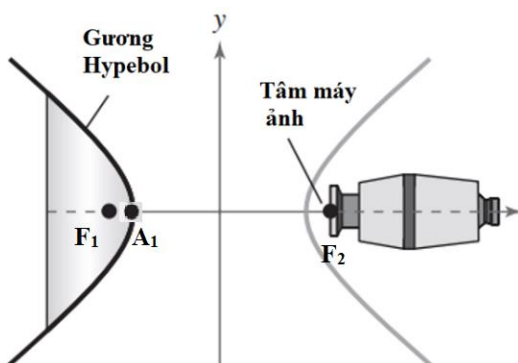
Câu 21: Để chụp toàn cảnh, ta có thể sử dụng một gương hypebol. Máy ảnh được hướng về phía đỉnh của gương và tâm quang học của máy ảnh được đặt tại một tiêu điểm của gương.



Lời giải

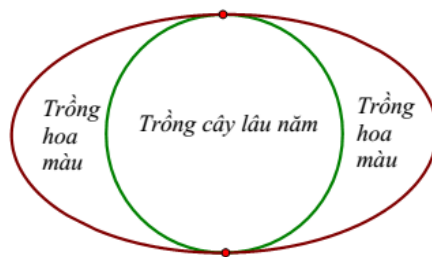
Gọi $(H): \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$.

Phương trình của gương (H) có dạng $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, với $a = 5, b = 4$ suy ra $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{41}$.



Vậy khoảng cách từ tâm của máy ảnh tới đỉnh của gương là $F_2A_1 = \sqrt{41} + 5$.

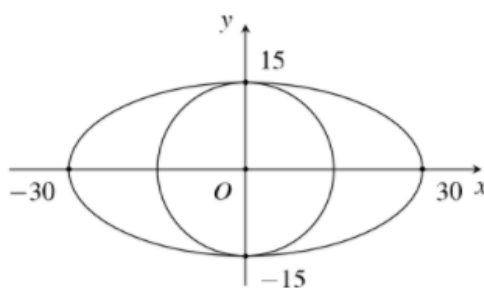
Câu 22: Ông An có một mảnh vườn hình Elip có chiều dài trục lớn và trục nhỏ lần lượt là 60 m và 30 m. Ông chia mảnh vườn ra làm hai nửa bằng một đường tròn tiếp xúc trong với Elip để làm mục đích sử dụng khác nhau.



Nửa bên trong đường tròn ông trồng cây lâu năm, nửa bên ngoài đường tròn ông trồng hoa màu. Tính tỉ số diện tích T giữa phần trồng cây lâu năm so với diện tích trồng hoa màu. Biết diện tích hình Elip được tính theo công thức $S = \pi ab$ với a, b lần lượt là nửa độ dài trục lớn và nửa độ dài trục bé. Biết độ rộng của đường Elip là không đáng kể.

Lời giải

Xét hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



Khi đó đường tròn có bán kính là $R = 15$ và elip có nửa độ dài trục lớn là $a = 30$, nửa độ dài trục bé là $b = 15$.

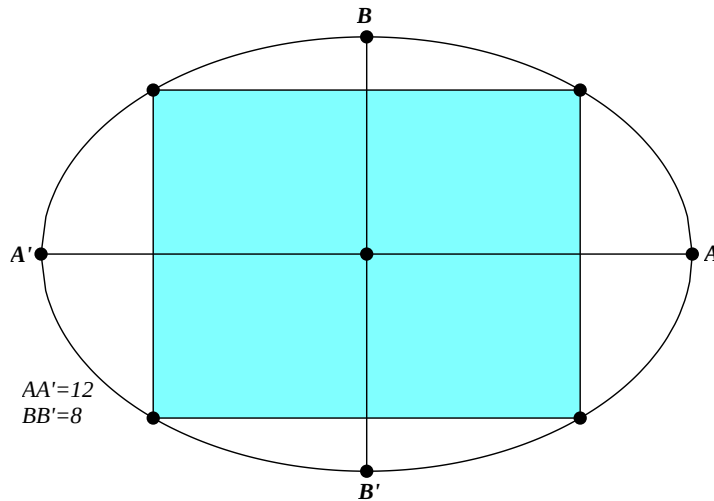
Diện tích đường tròn là $S_{(C)} = \pi R^2 = \pi 15^2 = 225\pi$.

Diện tích Elip là $S_{(E)} = \pi ab = \pi \cdot 30 \cdot 15 = 450\pi$.

Diện tích nửa bên ngoài đường tròn trồng hoa màu là: $S = S_{(E)} - S_{(C)} = 450\pi - 225\pi = 225\pi$.

Vậy tỉ số diện tích $T = \frac{225\pi}{225\pi} = 1$.

Câu 23: Một mảnh vườn hình elip có độ dài trục lớn bằng $12m$, độ dài trục bé bằng $8m$. Người ta dự định trồng hoa trong một hình chữ nhật nội tiếp của elip như hình vẽ. Hỏi diện tích trồng hoa lớn nhất có thể là bao nhiêu?



Lời giải

Đặt phương trình chính tắc của (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Ta có $2a = 12 \Rightarrow a = 6$, $2b = 8 \Rightarrow b = 4$.

Suy ra (E) : $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Gọi $M(x_M; y_M)$ là một đỉnh của hình chữ nhật mà có $x_M > 0, y_M > 0$.

$\Rightarrow M \in (E) \Rightarrow \frac{x_M^2}{36} + \frac{y_M^2}{16} = 1$;

Khi đó, diện tích hình chữ nhật là $S = 4x_M \cdot y_M = 48 \cdot 2 \cdot \frac{x_M}{6} \cdot \frac{y_M}{4} \leq 48 \left(\frac{x_M^2}{36} + \frac{y_M^2}{16} \right) = 48$.

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \begin{cases} \frac{x_M^2}{36} + \frac{y_M^2}{16} = 1 \\ \frac{x_M}{6} = \frac{y_M}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 3\sqrt{2} \\ y_M = 2\sqrt{2} \end{cases}.$$

Vậy diện tích trồng hoa lớn nhất là $48m^2$, khi hình chữ nhật có chiều dài là $6\sqrt{2}m$ và chiều rộng là $4\sqrt{2}m$.

Câu 24: Vệ tinh nhân tạo đầu tiên được Liên Xô phóng từ Trái đất năm 1957. Quỹ đạo của vệ tinh đó là một đường elip nhận tâm Trái Đất là một tiêu điểm. Người ta đo được vệ tinh cách bề mặt Trái Đất gần nhất là 583 dặm và xa nhất là 1342 dặm (1 dặm $\approx 1,609km$). Tìm tâm sai của quỹ đạo đó biết bán kính của Trái Đất xấp xỉ 4000 dặm.

Lời giải

Giả sử tâm trái đất là $F_1(-c; 0)$, điểm M biểu thị cho vệ tinh trên đường elip.

Khoảng cách từ M đến tâm trái đất là $MF_1 = a + \frac{c}{a}x$.

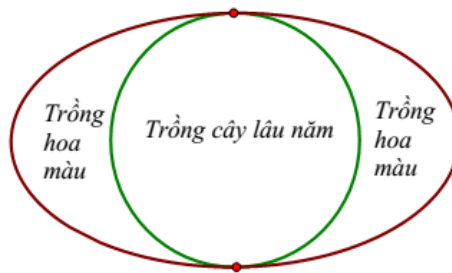
Ta có: $-a \leq x \leq a \Rightarrow -c \leq \frac{c}{a}x \leq c \Rightarrow a-c \leq a + \frac{c}{a}x \leq a+c \Rightarrow a-c \leq MF_1 \leq a+c$.

MF_1 có giá trị nhỏ nhất là $a-c$ và có giá trị lớn nhất là $a+c$, nên theo giả thiết ta có hệ

$$\text{phương trình: } \begin{cases} a-c = 583+4000 = 4583 \\ a+c = 1342+4000 = 5342 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4962,5 \\ c = 379,5 \end{cases}.$$

$$\text{Do đó: } e = \frac{c}{a} = \frac{379,5}{4962,5} \approx 0,0765.$$

Câu 25: Ông A có một mảnh vườn hình Elip có chiều dài 1 trục là 60m. Ông chia mảnh vườn ra làm hai nửa bằng một đường tròn tiếp xúc trong với Elip để làm mục đích sử dụng khác nhau.



Nửa bên trong đường tròn ông trồng cây lâu năm, nửa bên ngoài đường tròn ông trồng hoa màu. Biết chu vi đường tròn trồng cây lâu năm là $C = 40\pi m$. Tính diện tích trồng hoa màu, biết diện tích hình Elip được tính theo công thức $S = \pi ab$, với a, b lần lượt là nửa độ dài trục lớn và nửa độ dài trục nhỏ. Biết độ rộng của đường Elip là không đáng kể.

Lời giải

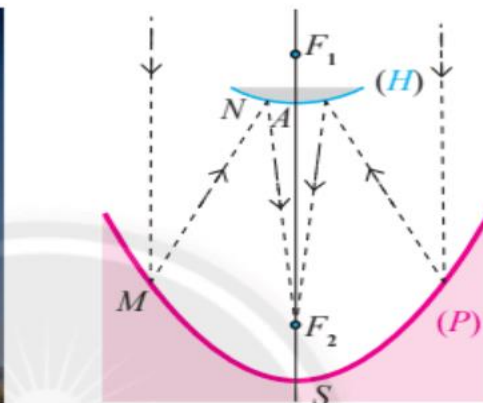
Chu vi đường tròn là $C = 40\pi m$. Suy ra bán kính đường tròn là $R = 20m$.

Diện tích hình tròn (C) phần trồng cây lâu năm là: $S_{(C)} = \pi.R^2 = 20^2.\pi = 400\pi (m^2)$.

Theo đề ta có: diện tích hình Elip (E) là: $S_{(E)} = \pi.a.b = \pi.30.20 = 600\pi (m^2)$.

Suy ra diện tích phần trồng hoa màu là: $S = S_{(E)} - S_{(C)} = 600 - 400 = 200 (m^2)$.

Câu 26: Ta đã biết tính chất quang học của ba đường conic, Hypebol cũng có tính chất quang học tương tự như elip: Tia sáng hướng tới tiêu điểm F_1 của hypebol (H) khi gặp một nhánh của (H) sẽ cho tia phản xạ đi qua tiêu điểm F_2 . Một nhà nghiên cứu thiết kế một kính thiên văn vô tuyến chứa hai gương có mặt cắt hình parabol (P) và hình một nhánh của hypebol (H). Parabol (P) có tiêu điểm F_1 và đỉnh S . Hypebol (H) có đỉnh A , có chung một tiêu điểm là F_1 với (P) và còn có tiêu điểm thứ hai F_2 .



Nguyên tắc hoạt động của kính thiên văn đó như sau: tín hiệu đến từ vũ trụ được xem như song song với trục của parabol (P), khi đến điểm M của (P) sẽ cho tia phản xạ theo hướng MF_2 , tia này gặp (H) tại điểm N và cho tia phản xạ tới F_2 là nơi thu tín hiệu. Cho biết $SF_1 = 14m$, $SF_2 = 2m$ và $AF_1 = 1m$. Hãy viết phương trình chính tắc của (P) và (H).

Lời giải

Gọi phương trình chính tắc của (H) là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$).

F_1, F_2 là hai tiêu điểm của (H) nên $2c = F_1F_2 = SF_1 - SF_2 = 14 - 2 = 12 \Rightarrow c = 6$.

$AF_2 = F_1F_2 - AF_1 = 12 - 1 = 11$.

Vì A thuộc (H) nên $2a = |AF_1 - AF_2| = |1 - 11| = 10 \Rightarrow a = 5$

$\Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 11$.

Vậy phương trình chính tắc của (H) là $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{11} = 1$.

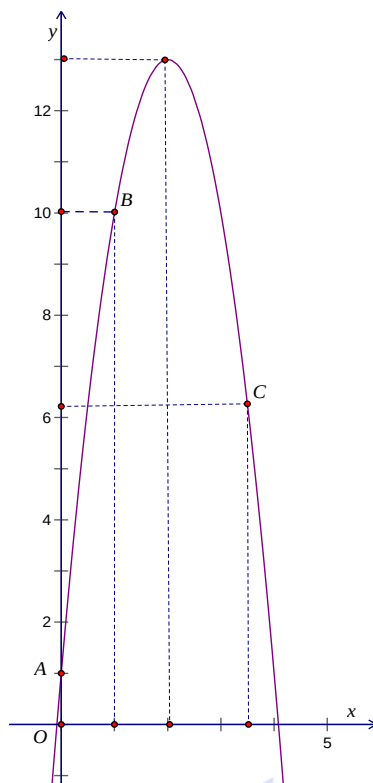
Gọi phương trình chính tắc của (P) là $y^2 = 2px$ ($p > 0$).

S là đỉnh và F_1 là tiêu điểm của parabol nên $\frac{p}{2} = SF_1 = 14 \Rightarrow p = 28$.

Suy ra phương trình chính tắc của (P) là $y^2 = 56x$.

Câu 27: Một quả bóng cầu thủ sút lên rồi rơi xuống theo quỹ đạo là parabol. Biết rằng ban đầu quả bóng được sút lên từ độ cao 1 m sau đó 1 giây nó đạt độ cao 10 m và 3,5 giây nó ở độ cao 6,25 m. Hỏi độ cao cao nhất mà quả bóng đạt được là bao nhiêu mét?

Lời giải



Biết rằng quỹ đạo của quả bóng là một cung parabol nên phương trình có dạng $y = ax^2 + bx + c$. Theo bài ra, gắn vào hệ tọa độ và sẽ tương ứng các điểm A, B, C nên ta có:

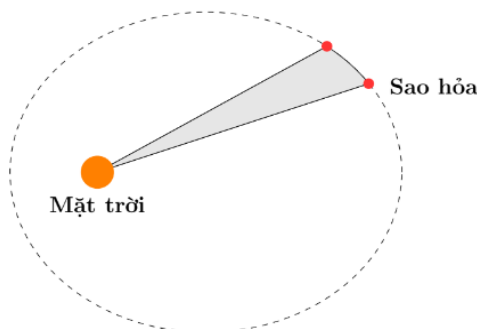
$$\begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = 10 \\ 12,25a + 3,5b + c = 6,25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 12 \\ c = 1 \end{cases}$$

Suy ra phương trình parabol là $y = -3x^2 + 12x + 1$.

Parabol có đỉnh $I(2;13)$. Khi đó quả bóng đạt vị trí cao nhất tại đỉnh tức $h = 13$ m.

Câu 28: Quỹ đạo của Sao Hỏa là elip có bán kính trục lớn bằng 227,9 triệu km, tâm sai $e = 0,0934$ và quay quanh Mặt trời một vòng hết 687 ngày. Định luật Kepler thứ hai khẳng định rằng: đường nối một hành tinh với mặt trời quét qua những diện tích bằng nhau trong những khoảng thời gian bằng nhau. Biết rằng diện tích của elip có các bán trục a, b bằng πab , tính diện tích mà đường nối Sao Hỏa và Mặt trời quét qua trong 1 giây.

Lời giải



Diện tích quét trong 1 giây là $\frac{S}{687.24.3600} \approx 2737$ triệu km^2 .

Lời giải

Khi đó phương trình (E): $\frac{x^2}{149,5^2} + \frac{y^2}{149,48^2} = 1.$

Lời giải

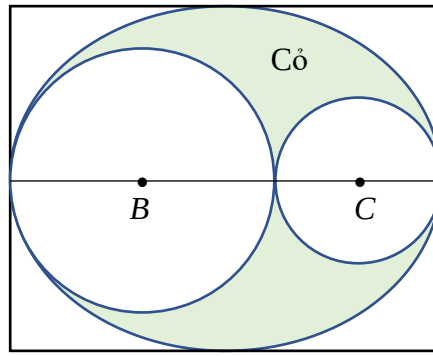
Vì âm thanh di chuyển với tốc độ 300 mét/micro giây nên hiệu số khoảng cách từ con tàu tới A và B là $500 \times 300 \text{ m} = 150000 \text{ m} = 150 \text{ km}$.

Con tàu nằm trên một nhánh của hyperbol, với hai tháp vô tuyến A và B là hai tiêu điểm, A và B cách nhau $200km$, nghĩa là $2c = 200 \Rightarrow c = 100$.

và phương trình chuẩn của hyperbol là $\frac{x^2}{5625} - \frac{y^2}{4375} = 1$.

Vây tàu cách bờ biển $\approx 58,33 \text{ km}$.

21 | **Ths. Lê Việt – THPT Thăng Long, Hà Nội – Phone: 0835221183 - Ôn thi cam kết điểm số**



Phần được tô đậm dùng để trồng cỏ, phần còn lại lát gạch. Biết mỗi mét vuông trồng cỏ chỉ phí 100 nghìn đồng, mỗi mét vuông lát gạch chỉ phí 300 nghìn đồng. Khi diện tích phần lát gạch là nhỏ nhất thì tổng chi phí thi công vườn hoa Hạnh Phúc bằng. Biết diện tích hình elip được tính theo công thức $S = \pi ab$, với a, b lần lượt là nửa độ dài trục lớn và nửa độ dài trục nhỏ.

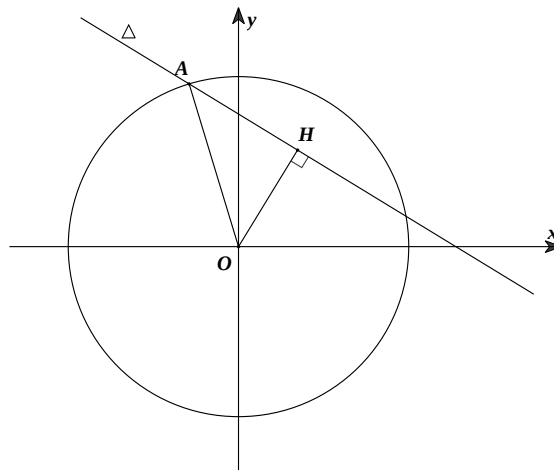
Lời giải

Gọi $x, y(m)$ lần lượt là bán kính của phần lát gạch hình tròn ($x, y > 0$) ta có $x + y = 5$.

Gọi $S(m^2)$ là phần diện tích được lát gạch của khu vườn ($S > 0$), ta có

$$S = 80 - 20\pi + \pi x^2 + \pi y^2 = 80 - 20\pi + \pi(x^2 + y^2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{S + 20\pi - 80}{\pi}.$$

Ta có: $(C): x^2 + y^2 = \frac{S + 20\pi - 80}{\pi}$ có tâm $O(0;0)$, bán kính $R = \sqrt{\frac{S + 20\pi - 80}{\pi}}$ và đường thẳng $\Delta: x + y - 5 = 0$. Khi đó bài toán trở thành: Tìm R nhỏ nhất để (C) và Δ có ít nhất một điểm chung, với hoành độ và tung độ đều là các số dương?



Ta có (C) và Δ có ít nhất một điểm chung khi và chỉ khi

$$R \geq d(O, \Delta) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{S + 20\pi - 80}{\pi}} \geq \frac{5}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow S + 20\pi - 80 \geq \frac{25\pi}{2} \Leftrightarrow S \geq 80 - \frac{15\pi}{2}.$$

Vậy diện tích phần lát gạch nhỏ nhất bằng $S_{\min} = 80 - \frac{15\pi}{2}$.

Từ đó chi phí để thi công khu vườn Hạnh phúc là $100.(80 - S_{\min}) + 300.S_{\min} \approx 19288$ nghìn đồng.

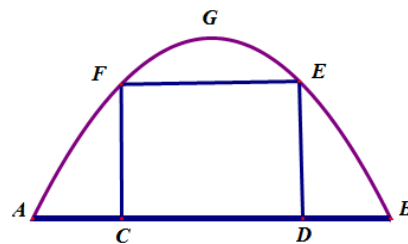
Một cách tính $S_{\min}$ khác

Ta có: $S = 80 - 20\pi + \pi x^2 + \pi y^2 = 80 - 20\pi + \pi(x^2 + y^2)$

$$\geq 80 - 20\pi + \frac{\pi(x+y)^2}{2} = 80 - 20\pi + \pi \frac{25}{2} = 80 - \frac{15\pi}{2}.$$

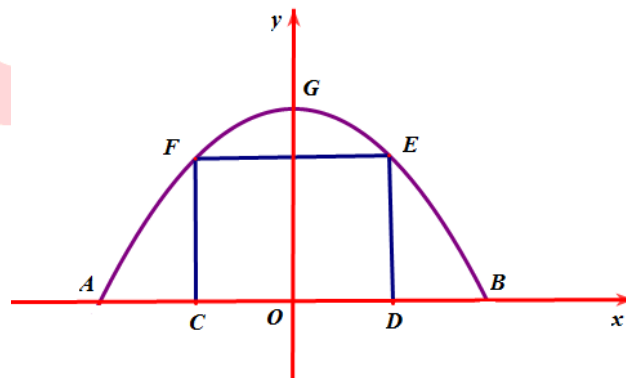
Vậy diện tích phần lát gạch nhỏ nhất bằng $S_{\min} = 80 - \frac{15\pi}{2}$.

Câu 32: Một chiếc cổng hình parabol bao gồm một cửa chính hình chữ nhật ở giữa và hai cánh cửa phụ hai bên như hình vẽ. Biết chiều cao cổng parabol là 4m còn kích thước cửa ở giữa là 3m x 4m.



Hãy tính khoảng cách giữa hai điểm A và B.

Lời giải



Gắn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, chiếc cổng là 1 phần của parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ với $a < 0$.

Do parabol (P) đối xứng qua trục tung nên có trục đối xứng $x = 0 \Rightarrow -\frac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow b = 0$.

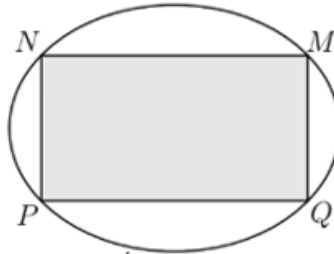
Chiều cao của cổng parabol là 4m nên $G(0; 4) \Rightarrow c = 4 \Rightarrow (P): y = ax^2 + 4$

Lại có, kích thước cửa ở giữa là 3m x 4m nên $E(2; 3), F(-2; 3) \Rightarrow 3 = 4a + 4 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}$.

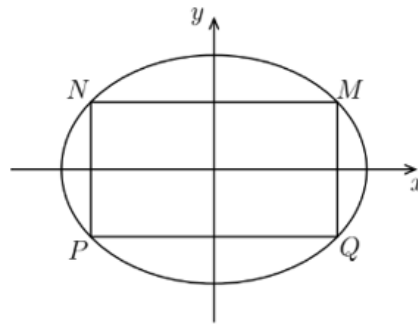
Vậy $(P): y = -\frac{1}{4}x^2 + 4$.

Ta có $-\frac{1}{4}x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -4 \end{cases}$ nên $A(-4;0)$, $B(4;0)$ hay $AB = 8$.

Câu 33: Ông Thanh có một mảnh vật liệu hình elip với trục lớn, trục nhỏ có độ dài $80cm$ và $60cm$. Ông Thanh muốn cắt một hình chữ nhật có các cạnh song song với các trục của elip và các đỉnh của hình chữ nhật thuộc elip. Tính tỉ số $\frac{MN}{MQ}$ để hình chữ nhật có diện tích lớn nhất?



Lời giải



Ta chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Khi đó phương trình của (E) : $\frac{x^2}{40^2} + \frac{y^2}{30^2} = 1$. Giả sử $M(x, y)$, $S_{MNPQ} = 4|xy|$, theo bất đẳng

thức Cosi ta có $\frac{x^2}{40^2} + \frac{y^2}{30^2} = 1 \geq 2\sqrt{\frac{x^2 y^2}{40^2 \cdot 30^2}} = \frac{|xy|}{600}$. Do đó $S_{MNPQ} = 4|xy| \leq 2400$.

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{|x|}{40} = \frac{|y|}{30} \Leftrightarrow \frac{|x|}{|y|} = \frac{4}{3}$.

Câu 34: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho

a) Elip (E) : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ và điểm $M(1;1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M và cắt (E) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho M là trung điểm AB .

b) Elip (E) : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ và điểm $M\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua M và cắt (E) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $MA = 2MB$.

c) Elip (E) : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ và đường thẳng $d: 2x + y + 3 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc d và cắt (E) tại hai điểm A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 1.

d) Elip $(E): x^2 + 3y^2 = 6$ có hai tiêu điểm F_1, F_2 trong đó F_1 có hoành độ âm. Gọi d là đường thẳng đi qua F_2 và song song với $\Delta: y = -x + 1$ đồng thời cắt (E) tại hai điểm A, B phân biệt. Tính diện tích tam giác ABF_1 .

Lời giải

a) Thay tọa độ điểm M vào vế trái của (E) ta được $\frac{1}{25} + \frac{1}{9} < 1$. Suy ra M nằm ở miền trong của (E) .

Do đó mọi đường thẳng đi qua M đều cắt (E) tại hai điểm phân biệt.

Gọi $A(x; y) \in (E)$ nên $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ (1).

Do $M(1; 1)$ là trung điểm của AB nên $B(2 - x; 2 - y)$.

Vì $B \in (E)$ nên $\frac{(2 - x)^2}{25} + \frac{(2 - y)^2}{9} = 1$ (2).

Từ (1) và (2), ta được:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 4x + 4}{25} + \frac{y^2 - 4y + 4}{9} &= 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + \left(\frac{-4x + 4}{25} + \frac{-4y + 4}{9} \right) = 1 \\ \Leftrightarrow \frac{-4x + 4}{25} + \frac{-4y + 4}{9} &= 0 \Leftrightarrow 9x + 25y - 34 = 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Do tọa độ hai điểm A, B đều thỏa mãn $(*)$ nên phương trình $(*)$ chính là phương trình đường thẳng d cần tìm.

Cách 2:

Ta có $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow 9x^2 + 25y^2 = 225$. Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là hai điểm thỏa yêu cầu bài toán.

$$\text{Ta có } A, B \in (E) \Leftrightarrow \begin{cases} 9x_1^2 + 25y_1^2 = 225 \\ 9x_2^2 + 25y_2^2 = 225 \end{cases}$$

Trừ vế theo vế ta được $9(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + 25(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 0$.

Vì M là trung điểm AB nên $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2x_M = 2 \\ y_1 + y_2 = 2y_M = 2 \end{cases}$. Thay vào trên, ta được

$$18(x_1 - x_2) + 50(y_1 - y_2) = 0 \Leftrightarrow y_1 - y_2 = -\frac{9}{25}(x_1 - x_2).$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1) = \left(x_2 - x_1; -\frac{9}{25}(x_1 - x_2)\right) = (x_1 - x_2) \left(1; -\frac{9}{25}\right).$$

Suy ra $\vec{u} = (25; -9)$ là một vec-tơ chỉ phương của Δ nên $\Delta: 9x + 25y - 34 = 0$.

Bằng cách giải thứ nhất ta có thể giải được bài toán tổng quát khi thay giả thiết $MA = MB$ bằng giả thiết M chia đoạn AB theo tỉ số k nào đó.

Cụ thể ta xét bài toán sau:

b) Gọi $A(x; y)$, $B(x_0; y_0)$. Vì $B \in (E)$ nên $\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{1} = 1$ (1).

Thay tọa độ điểm M vào vế trái của (E) ta được

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{4} + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1} = \frac{20}{36} < 1. \text{ Suy ra } M \text{ nằm ở miền trong của } (E).$$

Mà $MA = 2MB$ suy ra $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}$ nên $A(-2x_0 + 2; -2y_0 + 2)$.

$$\text{Mặt khác, } A \in (E) \text{ nên } \frac{(-2x_0 + 2)^2}{4} + \frac{(-2y_0 + 2)^2}{1} = 1 \text{ (2).}$$

Từ (1) và (2), ta có

$$\begin{cases} \frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{1} = 1 \\ \frac{(-2x_0 + 2)^2}{4} + \frac{(-2y_0 + 2)^2}{1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y_0^2 - 8y_0 + 3 = 0 \\ \frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x_0 = \frac{8}{5} \\ y_0 = \frac{3}{5} \end{cases}.$$

• Với $(0; 1)$. Đường thẳng cần tìm đi qua M và B nên có phương trình: $x + 2y - 2 = 0$.

• Với $B\left(\frac{8}{5}; \frac{3}{5}\right)$. Đường thẳng cần tìm đi qua M và B nên có phương trình: $5x + 70y - 50 = 0$.

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn bài toán là: $x + 2y - 2 = 0$ hoặc $5x + 70y - 50 = 0$.

c) Do Δ vuông góc với $d: 2x + y + 3 = 0$ nên $\Delta: x - 2y + m = 0$.

Đường thẳng Δ cắt (E) tại hai điểm A, B nên tọa độ A, B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1 \\ x - 2y + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - m \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - m \\ 8y^2 - 4my + m^2 - 4 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Để Δ cắt (E) tại hai điểm A, B phân biệt khi phương trình $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 32 - 4m^2 > 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}.$$

Gọi y_1, y_2 là hai nghiệm của phương trình (*), suy ra $\begin{cases} y_1 + y_2 = \frac{m}{2} \\ y_1 \cdot y_2 = \frac{m^2 - 4}{8} \end{cases}$.

Ta được tọa độ $A(2y_1 - m; y_1), B(2y_2 - m; y_2)$. Ta có

$$AB = \sqrt{5(y_2 - y_1)^2} = \sqrt{5[(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2]} = \frac{\sqrt{5(8 - m^2)}}{2}.$$

Mặt khác, $d(O, AB) = d(O, \Delta) = \frac{|m|}{\sqrt{5}}$. Do đó

$$S_{\Delta OAB} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} AB \cdot d(O, AB) = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{m^2(8 - m^2)}}{4} = 1 \Leftrightarrow m = \pm 2.$$

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn là $\Delta: x - 2y + 2 = 0$ hoặc $\Delta: x - 2y - 2 = 0$.

d) Phương trình Elip (E) ở dạng chính tắc (E): $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$.

Ta có $a^2 = 6, b^2 = 2$. Suy ra $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2$.

Hai tiêu điểm có tọa độ là: $F_1(-2; 0)$ và $F_2(2; 0)$.

Đường thẳng d đi qua $F_2(2; 0)$ và song song với $\Delta: y = -x + 1$ nên có phương trình $d: x + y - 2 = 0$.

Tọa độ điểm A, B là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x^2 + 3y^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ x^2 + 3(2 - x)^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ 2x^2 - 6x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } A\left(\frac{3 + \sqrt{3}}{2}; \frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right), B\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{2}; \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right) \text{ hoặc } A\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{2}; \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right), B\left(\frac{3 + \sqrt{3}}{2}; \frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right).$$

Khi đó $AB = \sqrt{6}$ và $d(F_1, AB) = d(F_1, d) = 2\sqrt{2}$.

Suy ra diện tích tam giác ABF_1 là $S_{\Delta ABF_1} = \frac{1}{2} AB \cdot d(F_1, d) = 2\sqrt{3}$.

Câu 35: Trong mặt phẳng Oxy , cho parabol (P): $y^2 = 8x$ có tiêu điểm F .

a) Tìm trên (P) điểm M cách F một khoảng là 3.

b) Tìm điểm M trên (P) sao cho $S_{OMF} = 8$.

Lời giải

Hypebol (H) có các tiêu điểm $F_1(-\sqrt{5};0)$, $F_2(\sqrt{5};0)$.

a) Gọi $M(x; y)$ là điểm cần tìm. Ta có $\overrightarrow{F_1M} = (x + \sqrt{5}; y)$, $\overrightarrow{F_2M} = (x - \sqrt{5}; y)$.

Ta có $F_1M \perp F_2M \Leftrightarrow \overrightarrow{F_1M} \cdot \overrightarrow{F_2M} = 0 \Leftrightarrow (x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5}) + y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 5 = 0$.

Mà $M \in (H) \Leftrightarrow 4x^2 - y^2 = 4$ nên $5x^2 = 9$.

Từ đó ta được $x = \pm \frac{3}{\sqrt{5}}; y = \pm \frac{4}{\sqrt{5}}$.

Vậy có bốn điểm cần tìm là $\left(\frac{3}{\sqrt{5}}; \frac{4}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{3}{\sqrt{5}}; -\frac{4}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{3}{\sqrt{5}}; \frac{4}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{3}{\sqrt{5}}; -\frac{4}{\sqrt{5}}\right).$

b) Gọi $N(x; y)$ là điểm cần tìm. Ta có $N \in (H) \Rightarrow |NF_1 - NF_2| = 2a = 2$.

Xét tam giác F_1NF_2 ta có

$$\begin{aligned} F_1 F_2^2 &= F_1 N^2 + F_2 N^2 - 2 F_1 N . F_2 N . \cos F_1 N F_2 \\ &= (F_1 N - F_2 N)^2 + 2 F_1 N . F_2 N - 2 F_1 N . F_2 N . \cos 120^\circ \\ &= 4 + 3 F_1 N . F_2 N = 4 + 3 |a + ex| . |a - ex| = 4 + 3 |a^2 - e^2 x^2|. \end{aligned}$$

$$\text{Nên } 4c^2 = 4 + 3|1 - 5x^2| \Leftrightarrow 4.5 = 4 + 3|1 - 5x^2| \Leftrightarrow |1 - 5x^2| = \frac{16}{3} \Leftrightarrow x^2 = \frac{19}{15} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{19}{15}}.$$

Thay $x = \pm \sqrt{\frac{19}{15}}$ vào phương trình của (H) ta tính được $y = \pm \sqrt{\frac{4}{15}}$.

Vậy có bốn điểm cần tìm là $\left(\sqrt{\frac{19}{15}}; \sqrt{\frac{4}{15}}\right), \left(-\sqrt{\frac{19}{15}}; -\sqrt{\frac{4}{15}}\right), \left(-\sqrt{\frac{19}{15}}; \sqrt{\frac{4}{15}}\right), \left(\sqrt{\frac{19}{15}}; -\sqrt{\frac{4}{15}}\right).$

c) Do (H) nhận Ox , Oy làm các trục đối xứng nên ta chỉ cần xét những điểm $(x; y)$ của (H) mà $x; y$ nguyên và $x \geq 0, y \geq 0$, rồi sau đó ta tìm những điểm đối xứng với những điểm này qua trục Ox và Oy .

Ta có $4x^2 - y^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (2x - y)(2x + y) = 4$.

Do $2x - y$, $2x + y$ nguyên, $2x + y \geq 0$ và $2x + y \geq 2x - y$ nên ta có các trường hợp

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{68}{21} \\ y^2 = \frac{4}{21} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \sqrt{\frac{68}{21}} \\ y = \pm \sqrt{\frac{4}{21}} \end{cases}.$$

Vì hệ có 4 nghiệm nên elip (E) và hypebol (H) cắt nhau tại bốn điểm phân biệt.

Từ hệ phương trình $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{12} = 1 \end{cases}$, cộng vế theo vế, ta được $\frac{7}{12}x^2 + \frac{7}{12}y^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{24}{7}$.

Vậy bốn giao điểm của elip (E) và hypebol (H) nằm trên đường tròn (C): $x^2 + y^2 = \frac{24}{7}$

Câu 39: Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(2; -1)$ biết M là trung điểm của AB và hai điểm A, B thuộc elip có phương trình $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Lời giải

Giả sử $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$.

Ta có $\frac{4}{16} + \frac{1}{9} < 1$ nên M nằm trong Elip.

M là trung điểm của AB nên: $\begin{cases} x_A + x_B = 2x_M = 2 \cdot 2 = 4 \\ y_A + y_B = 2y_M = 2 \cdot (-1) = -2 \end{cases}$.

Vì A, B thuộc elip $\Rightarrow \begin{cases} \frac{x_A^2}{16} + \frac{y_A^2}{9} = 1 \\ \frac{x_B^2}{16} + \frac{y_B^2}{9} = 1 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{x_A^2}{16} + \frac{y_A^2}{9} \right) - \left(\frac{x_B^2}{16} + \frac{y_B^2}{9} \right) = 0$

$$\Rightarrow \frac{x_A^2 - x_B^2}{16} + \frac{y_A^2 - y_B^2}{9} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x_A + x_B) \cdot (x_A - x_B)}{16} + \frac{(y_A + y_B) \cdot (y_A - y_B)}{9} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4(x_A - x_B)}{16} + \frac{-2(y_A - y_B)}{9} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x_A - x_B}{8} + \frac{(y_A - y_B)}{-9} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x_A - x_B}{8} = \frac{y_A - y_B}{9}$$

Mà $\overrightarrow{BA}$ có tọa độ là $(x_A - x_B; y_A - y_B)$ nên $\vec{u} = (8; 9)$ là một VTCP của AB

Phương trình đường thẳng AB là: $9(x-2)-8(y+1)=0 \Leftrightarrow 9x-8y-26=0$.

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $9x - 8y - 26 = 0$.

b) Tìm điều kiện của k để cả Δ và Δ' đều cắt (H) .

c) Tứ giác với bốn đỉnh là bốn giao điểm của Δ và Δ' với (H) là hình gì? Tính diện tích tứ giác này theo k . Xác định k để diện tích tứ giác đó có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

a) Ta có $a^2 = 4, b^2 = 9 \Rightarrow c^2 = b^2 + a^2 = 13$, suy ra $a = 2, b = 3$ và $c = \sqrt{13}$.

Vậy (H) có các tiêu điểm $F_1 = (-\sqrt{13}; 0)$, $F_2 = (\sqrt{13}; 0)$; tâm sai $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2}$; các đường tiệm cận $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{3}{2}x$ và đường chuẩn $x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{4}{\sqrt{13}}$.

b) $\Delta: y=kx$, $\Delta': y=-\frac{1}{k}x$.

Hoàn độ giao điểm của Δ và (H) là nghiệm của phương trình:

$$9x^2 - 4k^2x^2 = 36 \Leftrightarrow (9 - 4k^2)x^2 = 36.$$

$$\Delta \text{ cắt } (H) \text{ khi } 9-4k^2 > 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < k < \frac{3}{2}.$$

Tung độ giao điểm của Δ' và (H) là nghiệm của phương trình:

$$-4y^2 + 9k^2y^2 = 36 \Leftrightarrow (9k^2 - 4)y^2 = 36.$$

$$\Delta' \text{ cắt } (H) \text{ khi } 9k^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k < -\frac{2}{3} \\ k > \frac{2}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } \Delta \text{ và } \Delta' \text{ đều cắt (H) khi và chỉ khi } \left\{ \begin{array}{l} -\frac{3}{2} < k < \frac{3}{2} \\ k < -\frac{2}{3} \\ k > \frac{2}{3} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{3}{2} < k < -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} < k < \frac{3}{2} \end{array} \right].$$

c) Gọi A và C là các giao điểm của Δ và (H) ($x_A > 0$).

$$2px - a^2 - 4p^2 - (b+c)(y+a) = 0.$$

Từ đó đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định $M\left(\frac{a^2}{2p} + 2p; -a\right)$.

Câu 42: Cho elip $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ và đường thẳng $d: 3x + 4y - 12 = 0$. Biết đường thẳng d cắt (E) tại hai điểm phân biệt A, B . Biết điểm $C(a; b) \in (E)$ sao cho ΔABC có diện tích lớn nhất. Tính giá trị của biểu thức $T = a + 2b$.

Lời giải

Ta thấy đường thẳng d cắt (E) tại hai điểm phân biệt A, B là 2 điểm cố định $\Rightarrow$ độ dài đoạn AB là hằng số.

$$\text{Diện tích của } \Delta ABC: S = \frac{1}{2} d(C; d) \cdot AB.$$

Diện tích của ΔABC lớn nhất $\Rightarrow d(C; d)$ lớn nhất.

$$C(a; b) \in (E) \Rightarrow \frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{9} = 1.$$

$$\text{Và } d(C, d) = \frac{|3a + 4b - 12|}{5}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$$\text{Xét: } (3a + 4b)^2 = \left(12 \cdot \frac{a}{4} + 12 \cdot \frac{b}{3}\right)^2 \leq (12^2 + 12^2) \left(\frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{9}\right) = 288$$

$$\Rightarrow -12\sqrt{2} \leq 3a + 4b \leq 12\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow d(C, d) = \frac{|3a + 4b - 12|}{5} \leq \frac{12 + 12\sqrt{2}}{5}$$

$$\Rightarrow d(C; d) \text{ lớn nhất khi: } \begin{cases} \frac{a}{48} = \frac{b}{36} \\ 3a + 4b = -12\sqrt{2} \\ \frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{9} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2\sqrt{2} \\ b = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } C\left(-2\sqrt{2}; -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow a = -2\sqrt{2}, b = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a + 2b = -5\sqrt{2}.$$

Câu 43: Cho parabol (P) có phương trình $y^2 = 2px$ ($p > 0$) và gọi F là tiêu điểm của (P) . Chứng minh rằng đường thẳng d đi qua F tạo với chiều dương của trục Ox một góc α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt M, N . Gọi I là trung điểm của MN . Tìm quỹ tích

I khi α thay đổi.

Lời giải

Ta có parabol $(P): y^2 = 2px$ có tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$.

Đường thẳng d tạo với chiều dương của trục Ox một góc α nên đường thẳng d có hệ số góc $k = \tan \alpha$.

Ta có phương trình đường thẳng $d: y = \tan \alpha \cdot \left(x - \frac{p}{2}\right) \Leftrightarrow y = \left(x - \frac{p}{2}\right) \cdot \tan \alpha$.

Tọa độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng d là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ y = \left(x - \frac{p}{2}\right) \tan \alpha \end{cases} \Rightarrow \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 \tan^2 \alpha = 2px \Leftrightarrow x^2 \tan^2 \alpha - p(\tan^2 \alpha + 2)x + \frac{p^2}{4} \tan^2 \alpha = 0.$$

Phương trình có $\Delta = p^2(\tan^2 \alpha + 2)^2 - p^2 \tan^4 \alpha = 4p^2 \tan^2 \alpha + 4p^2 > 0 \quad \forall \alpha$ và $p > 0$.

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Suy ra đường thẳng d luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt $M(x_M; y_M); N(x_N; y_N)$ với x_M, x_N là nghiệm của phương trình.

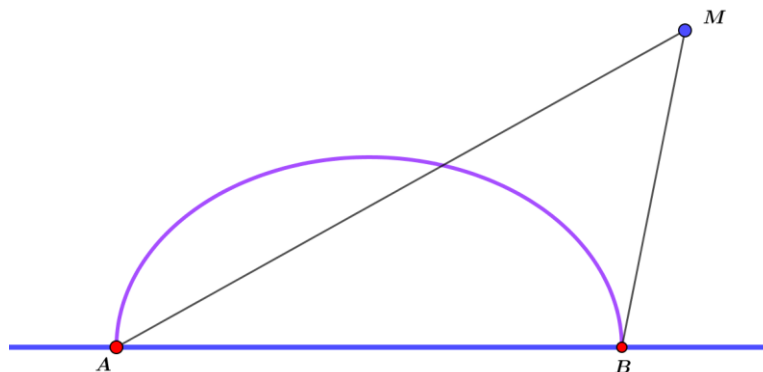
Theo định lý Viet ta có $x_M + x_N = \frac{p(\tan^2 \alpha + 2)}{\tan^2 \alpha}$.

Do I là trung điểm của MN nên ta có
$$\begin{cases} x_I = \frac{x_M + x_N}{2} \\ y_I = \left(x_I - \frac{p}{2}\right) \tan \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{p(\tan^2 \alpha + 2)}{2 \tan^2 \alpha} \\ y_I = \left(x_I - \frac{p}{2}\right) \tan \alpha \end{cases}$$

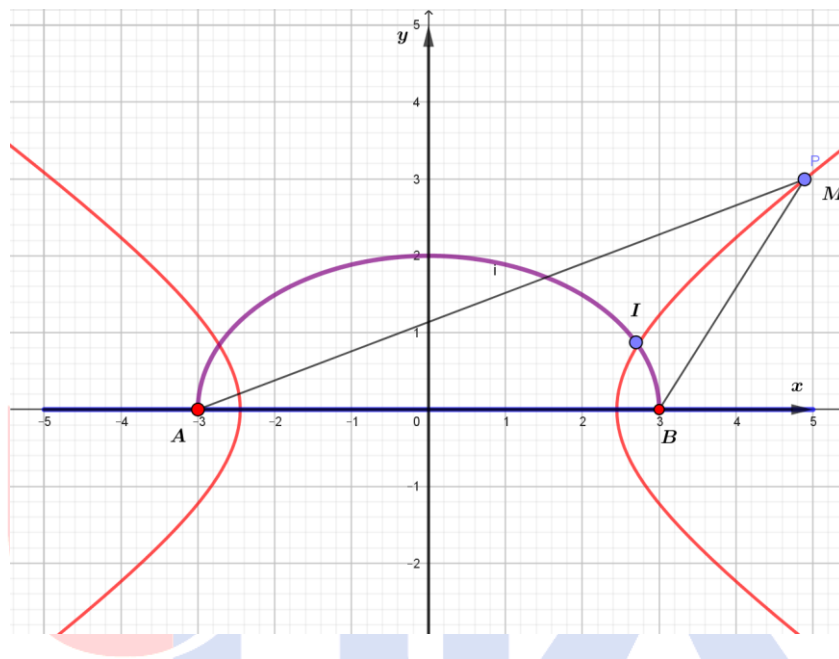
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{p(\tan^2 \alpha + 2)}{2 \tan^2 \alpha} \\ y_I = \left(\frac{p(\tan^2 \alpha + 2)}{2 \tan^2 \alpha} - \frac{p}{2}\right) \tan \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{p(\tan^2 \alpha + 2)}{2 \tan^2 \alpha} \\ y_I = \frac{p}{\tan \alpha} \end{cases} \Rightarrow y_I^2 = px_I - \frac{p^2}{2}.$$

Vậy quỹ tích trung điểm I của MN là parabol có phương trình $y^2 = px - \frac{p^2}{2}$.

Câu 44: Trên bờ biển có hai trạm thu phát tín hiệu A và B cách nhau 6 km, người ta xây một cảng biển cho tàu hàng neo đậu là một nửa hình elip nhận AB làm trục lớn và có tiêu cự bằng $2\sqrt{5}$ km. Một con tàu hàng M nhận tín hiệu đi vào cảng biển sao cho hiệu khoảng cách từ nó đến A và B luôn là $2\sqrt{6}$ km. Khi neo đậu tại cảng thì khoảng cách từ con tàu đến bờ biển là bao nhiêu?



Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình trên, trong đó 1 km ứng với 1 đơn vị.

Do $\begin{cases} |MA - MB| = 2\sqrt{6} \\ A(-3;0), B(3;0) \end{cases}$ nên M thuộc hypebol $(H): \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$.

Cảng biển xây theo hình elip có trục lớn là $AB = 6$ và tiêu cự là $2\sqrt{5} \Rightarrow (E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Khi con tàu M neo đậu thì chính là tại vị trí I .

$$\text{Lúc này tọa độ của } I \text{ thỏa mãn hệ } \begin{cases} \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{126}{17} \\ y^2 = \frac{12}{17} \end{cases}.$$

Khi đó khoảng cách từ con tàu M đến bờ biển là $\sqrt{\frac{12}{17}}$ km.