

III

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

1. Định lý côsin trong tam giác

Định lý côsin

Với mọi tam giác ABC , nếu đặt $BC = a, CA = b, AB = c$ thì ta luôn có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Hệ quả

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}; \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

2. Định lý sin trong tam giác

Định lý sin

Với mọi tam giác ABC , đặt $BC = a, CA = b, AB = c$, ta có: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$,

trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Hệ quả

$$a = 2R \sin A \quad \sin A = \frac{a}{2R}$$

$$b = 2R \sin B \quad \sin B = \frac{b}{2R}$$

$$c = 2R \sin C \quad \sin C = \frac{c}{2R}$$

3. Các công thức tính diện tích tam giác

Cho tam giác ABC . Ta kí hiệu:

- h_a, h_b, h_c là độ dài các đường cao lần lượt ứng với các cạnh BC, CA, AB .

- R, r lần lượt là bán kính các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác.

- p là nửa chu vi tam giác.

- S là diện tích tam giác.

Ta có các công thức tính diện tích tam giác sau:

$$1) S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$

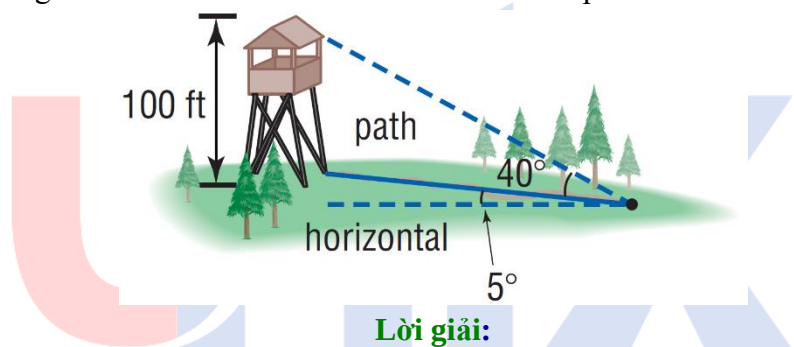
$$2) S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B$$

$$3) S = \frac{abc}{4R}$$

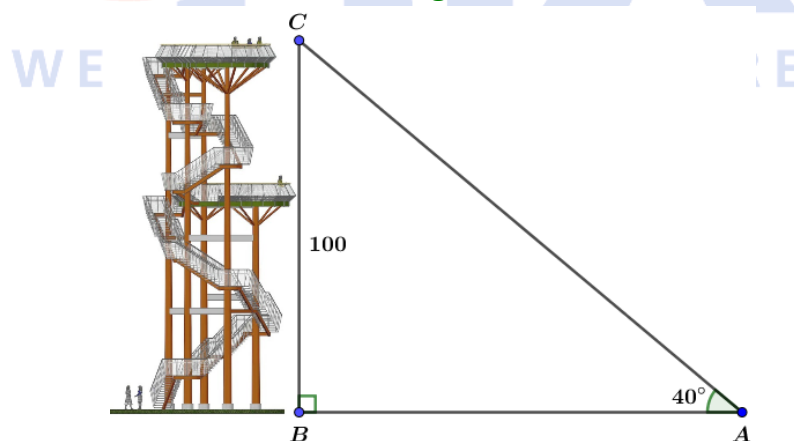
$$4) S = pr ;$$

$$5) S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (công thức Heron).}$$

Câu 1: Tính khoảng cách. Một nhân viên kiểm lâm đang đi trên đường nghiêng một góc 5° so với đường thẳng đứng để hướng về tháp quan sát cao 100 feet. Góc độ cao từ chân lên đỉnh tháp là 40° . Tính khoảng cách từ nhân viên kiểm lâm đến chân tháp vào thời điểm đó.



Lời giải:



Giả sử nhân viên kiểm lâm tại thời điểm đó đang đứng tại điểm A , ta kí hiệu chân tháp là B và đỉnh tháp là C .

Xét $\triangle ABC$ vuông tại B có $A = 40^\circ$ và $BC = 100$ nên $AB = \frac{BC}{\tan A} = \frac{100}{\tan 40^\circ} \approx 119,175$ ft.

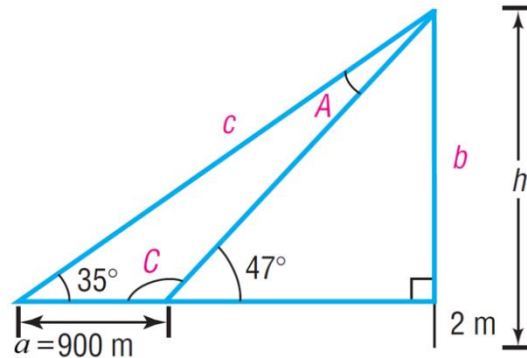
Vậy khoảng cách từ nhân viên đến chân tháp vào thời điểm đó xấp xỉ 119,175 ft.

Câu 2: Tìm chiều cao của một ngọn núi. Để đo được chiều cao của một ngọn núi, một nhân viên trắc địa nhìn đỉnh núi tại hai vị trí cách nhau 900 mét nằm trên một đường thẳng đến ngọn núi (quan sát hình minh họa). Lần quan sát đầu tiên người này nhìn đỉnh núi với một góc nâng là 47° và

lần thứ hai nhìn đỉnh núi với một góc nâng là 35° . Giả sử máy toàn đạc cao 2 mét, tìm chiều cao h của ngọn núi.

Lời giải:

Ta mô hình hóa bài toán trên bằng hình vẽ như sau:



với h là chiều cao của ngọn núi.

Ta có: $C = 180^\circ - 47^\circ = 133^\circ$.

Mặt khác: $C + A + 35^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow A = 180^\circ - 35^\circ - 133^\circ = 12^\circ$.

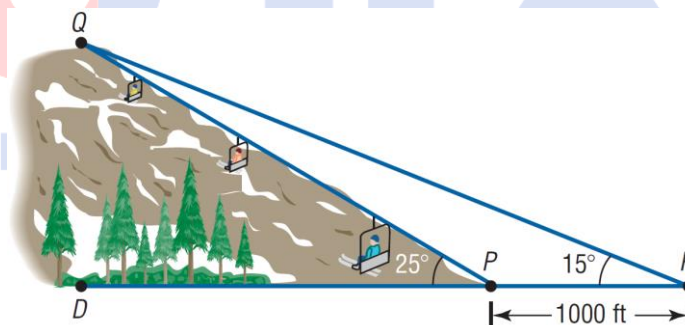
Áp dụng định lý sin ta có: $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Leftrightarrow c = \frac{900 \cdot \sin 133^\circ}{\sin 12^\circ} \approx 3165,8553$ (mét).

Mà: $\sin 35^\circ = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c \sin 35^\circ \approx 1815,8600$ (mét).

Vậy chiều cao của ngọn núi là: $h \approx 1815,8600 + 2 \approx 1817,860$ (mét).

Câu 3: **Xác định độ dài của cáp treo trượt tuyết và độ cao của núi.**

Tham khảo hình vẽ.



Để xác định chiều dài của cáp treo trượt tuyết cần lắp đặt từ điểm P đến điểm Q , một nhân viên trắc địa đo được $\angle DPQ$ bằng 25° , sau đó anh ta đi xa ra một đoạn 1000 feet tới điểm R và đo được $\angle PRQ$ bằng 15° .

a) Tính khoảng cách từ điểm P đến điểm Q ?

b) Tính chiều cao QD của núi?

Lời giải:

a) Ta có: $\angle DPQ = \angle PQR + \angle QRP \Rightarrow \angle PQR = \angle DPQ - \angle QRP = 25^\circ - 15^\circ = 10^\circ$.

Áp dụng định lý sin trong tam giác PQR ta có:

$$\frac{PR}{\sin \angle PQR} = \frac{PQ}{\sin \angle QRP} \Rightarrow PQ = \frac{PR \cdot \sin \angle QRP}{\sin \angle PQR} = \frac{1000 \cdot \sin 15^\circ}{\sin 10^\circ} \approx 1490,479 \text{ (feet)}$$

Vậy khoảng cách giữa hai điểm P và Q là 1490,479 (feet).

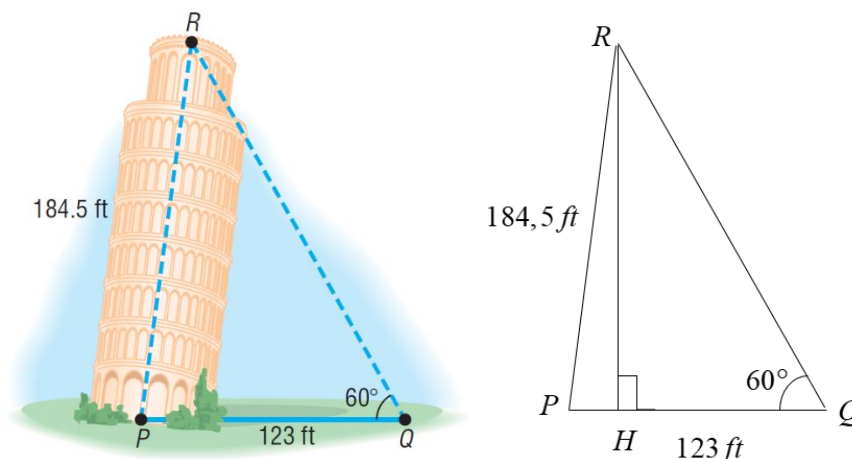
$$QD = PQ.\sin QPD = 1490,479.\sin 25^\circ = 629,904 \text{ (feet)}.$$

Lời giải:

Diagram of a triangle PQR with a dashed line segment RI perpendicular to the base PQ at point I . The base PQ is labeled 1000 ft . The angle at vertex P is 40° and the angle at vertex Q is 35° . The height RI is labeled $h?$.

$$\Rightarrow RI = \frac{PQ}{\cot 40^\circ + \cot 35^\circ} = \frac{1000}{\cot 40^\circ + \cot 35^\circ} \approx 381,694 \text{ (ft)}.$$

Câu 5: **Tìm độ nghiêng của tháp nghiêng Pisa.** Tháp nghiêng Pisa nổi tiếng có chiều cao là 184,5 feet. Góc nâng nhìn từ điểm Q cách chân tháp P một khoảng 123 feet lên đỉnh R của tháp có số đo là 60° . Tìm số đo góc RPQ (như hình vẽ) và tìm khoảng cách từ đỉnh R của tháp đến đường thẳng PQ .



Áp dụng hệ quả của định lí cosin, ta có:

$$\cos RPQ = \frac{PR^2 + PQ^2 - RQ^2}{2.PR.PQ} \approx \frac{(184,5)^2 + (123)^2 - (212,1436)^2}{2.184,5.123} \approx 0,0918 \Rightarrow RPQ \approx 84^\circ 44'.$$

Gọi H là chân đường cao kẻ từ R đến PQ .

$$\text{Ta có } \sin 60^\circ = \frac{RH}{RQ} \Rightarrow RH = RQ.\sin 60^\circ = 183,722 \text{ ft.}$$

Vậy, khoảng cách từ đỉnh R của tháp đến đường thẳng PQ là $RH \approx 183,722 \text{ ft.}$

Cách 2: Áp dụng định lí sin, ta có:

$$\frac{\sin PRQ}{PQ} = \frac{\sin RQP}{PR} \Rightarrow \sin PRQ = PQ.\frac{\sin RQP}{PR} = 123.\frac{\sin 60^\circ}{184,5} \approx 0,5774.$$

$$\Rightarrow PRQ \approx 35^\circ 16' \Rightarrow RPQ \approx 84^\circ 44'.$$

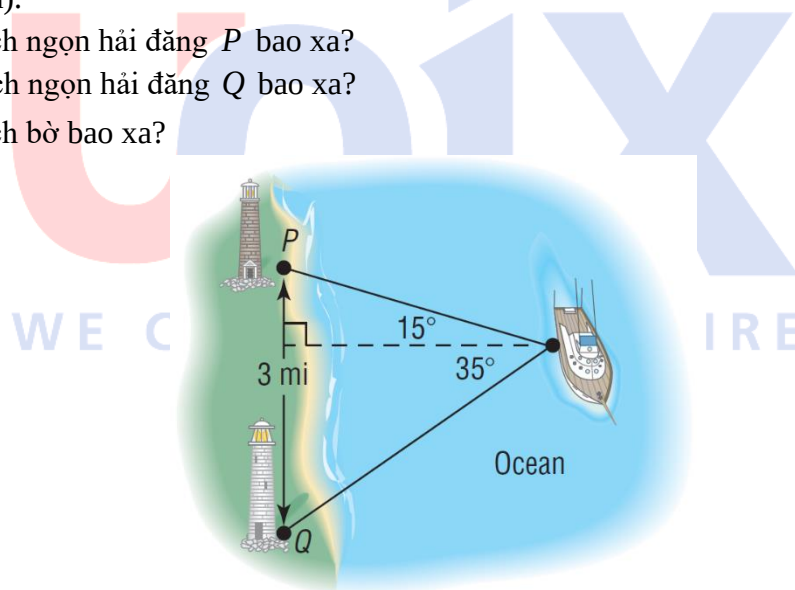
Gọi H là chân đường cao kẻ từ R lên PQ .

$$\text{Ta có } \sin 60^\circ = \frac{RH}{RQ} \Rightarrow RH = RQ.\sin 60^\circ \approx 183,722 \text{ ft.}$$

Vậy, khoảng cách từ đỉnh R của tháp đến đường thẳng PQ là $RH \approx 183,722 \text{ ft.}$

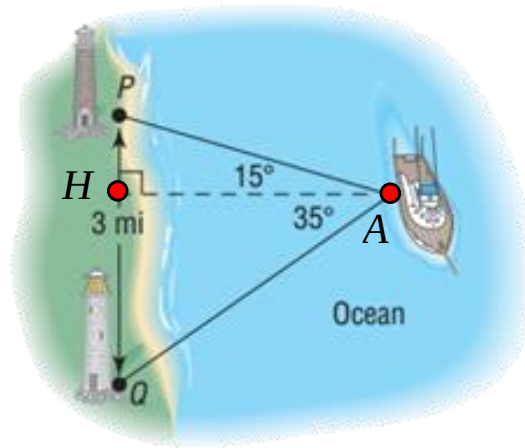
Câu 6: **Tính toán khoảng cách trên biển.** Hoa tiêu của một chiếc tàu trên biển phát hiện ra trên bờ biển có hai ngọn hải đăng cách nhau 3 dặm. Người ấy xác định được các góc tạo thành giữa các đường ngắm của hai ngọn hải đăng và đường thẳng từ tàu vuông góc với bờ là 15° và 35° (xem hình minh họa).

- Con tàu cách ngọn hải đăng P bao xa?
- Con tàu cách ngọn hải đăng Q bao xa?
- Con tàu cách bờ bao xa?



Lời giải:

Ta kí hiệu các điểm A, H như hình vẽ



Khi đó $HPA = 75^\circ$; $HQA = 55^\circ$, $PAQ = 50^\circ$.

Suy ra

$$\frac{AP}{\sin PQA} = \frac{PQ}{\sin PAQ} \Rightarrow AP = \frac{PQ \cdot \sin PQA}{\sin PAQ} = \frac{3 \cdot \sin 55^\circ}{\sin 50^\circ} \approx 3,2080 \text{ (dặm)}.$$

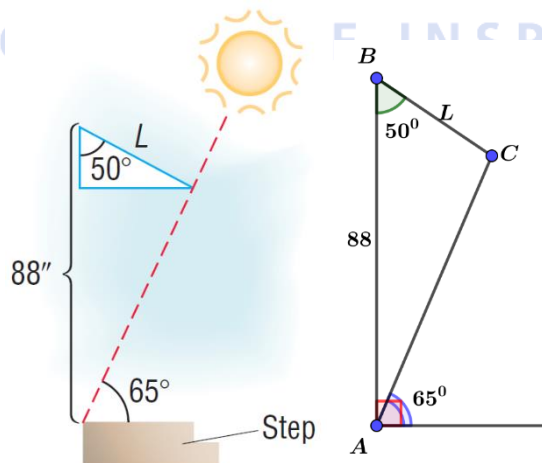
$$\frac{AQ}{\sin APQ} = \frac{PQ}{\sin PAQ} \Rightarrow AQ = \frac{PQ \cdot \sin APQ}{\sin PAQ} = \frac{3 \cdot \sin 75^\circ}{\sin 50^\circ} \approx 3,7828 \text{ (dặm)}.$$

$$AH = AP \cdot \cos PAH = 3,2080 \cdot \cos 15^\circ \approx 3,0987 \text{ (dặm)}.$$

Vậy thuyền cách bờ 3,0987 dặm

Câu 7: Thiết kế mái che. Một mái hiên che cửa kính có độ cao 88 inch và tạo với vách tường một góc 50° . Mục đích của mái hiên là che được ánh nắng mặt trời chiếu vào nhà khi góc giữa tia sáng mặt trời với mặt đất lớn hơn 65° . Xem hình vẽ. Tính độ dài L của mái hiên.

Lời giải:



Ta có $BAC = 25^\circ$; $ACB = 105^\circ$.

Áp dụng định lý sin vào tam giác ABC ta có:

$$\frac{AB}{\sin ACB} = \frac{BC}{\sin BAC} \Rightarrow BC = \frac{AB \cdot \sin 25^\circ}{\sin 105^\circ} \approx 12,001.$$

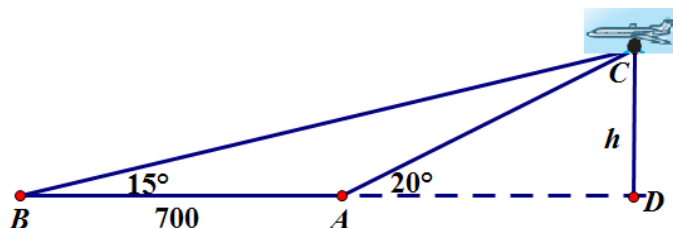
Vậy chiều dài L của mái hiên xấp xỉ 12,001 inch.

Câu 8: Xác định độ cao của máy bay. Hai cảm biến được đặt cách nhau 700 feet dọc theo đường dẫn tới một sân bay nhỏ. Khi một máy bay bay ở gần sân bay, góc nhìn từ cảm biến thứ nhất đến máy

bay là 20° , và từ cảm biến thứ hai đến máy bay là 15° . Xác định độ cao của máy bay tại thời điểm này.

Lời giải:

Trong mặt phẳng tạo bởi hai cảm biến và máy bay, gọi vị trí của cảm biến thứ nhất, thứ hai và máy bay lần lượt là A, B, C ; gọi hình chiếu của máy bay tới mặt đất là D .



Suy ra $AB = 700$, $CAD = 20^\circ$, $CBD = 15^\circ$.

Trong các tam giác vuông $\triangle CAD$, $\triangle CBD$ ta có

$$AD = h \cdot \cot CAD = h \cdot \cot 20^\circ$$

$$BD = h \cdot \cot CBD = h \cdot \cot 15^\circ$$

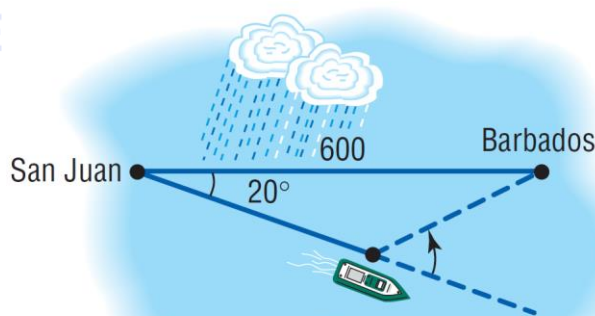
$$\Rightarrow BA = BD - AD = h(\cot 15^\circ - \cot 20^\circ) = h \cdot 0,9845.$$

$$\text{Vậy ta có } 700 = h \cdot 0,9846 \Leftrightarrow h = \frac{700}{0,9846} \approx 710,9486 \text{ feet.}$$

Câu 9: Tránh bão nhiệt đới. Một tàu du lịch chạy với tốc độ trung bình 15 hải lý/giờ khi đi từ San Juan, Puerto Rico, đến Barbados, Tây Ấn Độ, với khoảng cách 600 hải lý. Để tránh một cơn bão nhiệt đới, thuyền trưởng cho thuyền rời San Juan theo hướng lệch một góc 20° so với hướng đi thẳng đến Barbados. Thuyền trưởng duy trì tốc độ 15 hải lý/giờ trong 10 giờ, sau đó thuyền trưởng cho tàu đi thẳng đến Barbados mà không gặp bão.

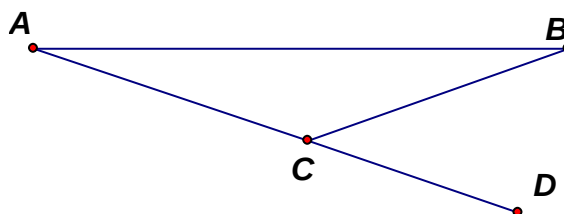
a) Tính góc mà thuyền trưởng quay đầu để đi thẳng đến Barbados?

b) Tính từ sau khi rẽ, nếu tốc độ được duy trì ở mức 15 hải lý/giờ thì sau bao lâu con tàu đến Barbados?



Lời giải:

Gọi A : vị trí San Juan; B : vị trí Barbados; C : vị trí tàu sau 10 giờ.



a) Ta có $AB = 600$ hải lý; $BAC = 20^\circ$.

Quãng đường tàu đi được trong 10 giờ đầu là $AC = 15.10 = 150$ hải lý.

Áp dụng định lý cosin cho $\triangle ABC$:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos BAC \Rightarrow BC \approx 461,9040 \text{ hải lý.}$$

$$\text{Khi đó } \cos ACB = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2.AC.BC} \approx -0,8959 \Rightarrow ACB \approx 153,6243^\circ$$

$$\Rightarrow BCD = 180^\circ - ACB \approx 26,3757^\circ.$$

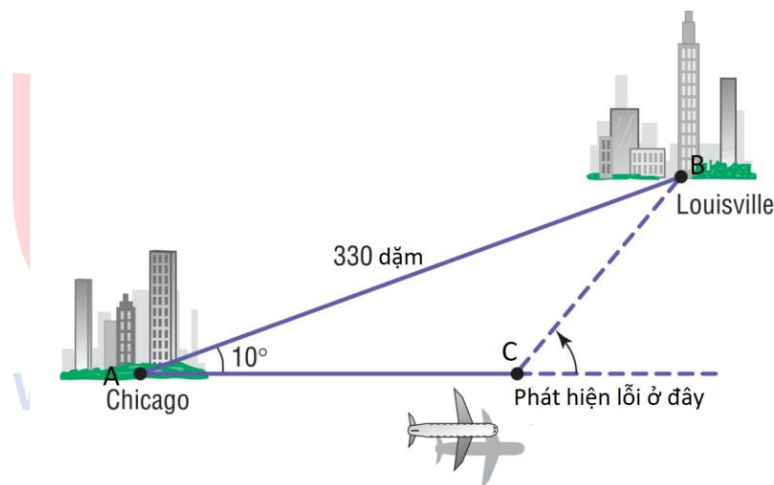
Vậy thuyền trưởng phải quay đầu một góc xấp xỉ $26,3757^\circ$.

$$\text{b) Thời gian đi kể từ sau khi rẽ là } t = \frac{BC}{15} \approx 30 \text{ giờ 48 phút.}$$

Câu 10: Điều chỉnh một kế hoạch bay. Trong một chuyến bay thử nghiệm từ Chicago tới Louisville, khoảng cách là 330 dặm, viên phi công đã vô tình chọn hướng bay sai lệch đi một góc 10° , như hình vẽ dưới đây.

a) Nếu máy bay duy trì tốc độ trung bình 220 dặm một giờ và nếu lỗi sai về hướng bay được phát hiện ra sau 15 phút, thì viên phi công nên điều chỉnh hướng bay chệch lên theo góc nào để bay tới được Louisville?

b) Viên phi công nên duy trì tốc độ trung bình tiếp theo của máy bay là bao nhiêu để cho tổng thời gian của chuyến bay là 90 phút?



Lời giải:

Đổi 15 phút bằng $\frac{15}{60} = 0.25$ giờ.

Đến khi phát hiện ra lỗi sai, máy bay đã bay được một quãng đường là $AC = 0,25.220 = 55$ (dặm).

Khi đó, máy bay còn cách Louisville một khoảng là

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos BAC}$$

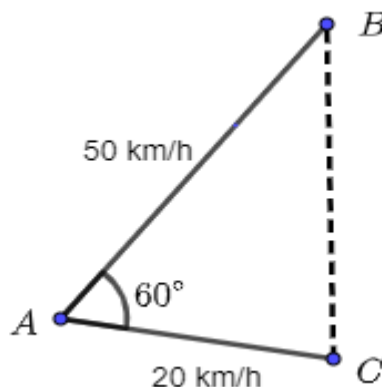
$$= \sqrt{330^2 + 55^2 - 2.330.55.\cos 10^\circ} \approx 276,0009 \text{ (dặm).}$$

$$\text{a) Theo định lí sin ta có: } \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} \Leftrightarrow \sin B = \frac{AC.\sin A}{BC} = \frac{55.\sin 10^\circ}{276,0009} \approx 0,0346$$

$$\Rightarrow B \approx 1,983^\circ \text{ (vì } AC < BC \Rightarrow B < A = 10^\circ < 90^\circ \text{).}$$

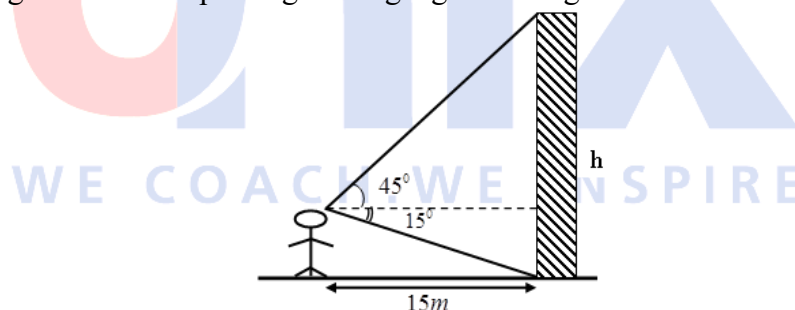
Do đó, viên phi công cần điều chỉnh hướng bay một góc bằng $A + B = 11,98^\circ$ để bay thẳng tới Louisville.

Câu 11: Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát vị trí A , đi thẳng theo hướng tạo với nhau một góc 60° . Tàu B chạy với vận tốc 50km/h , Tàu C chạy với vận tốc 20km/h . Hỏi sau 2 giờ thì hai tàu cách nhau bao nhiêu km ?

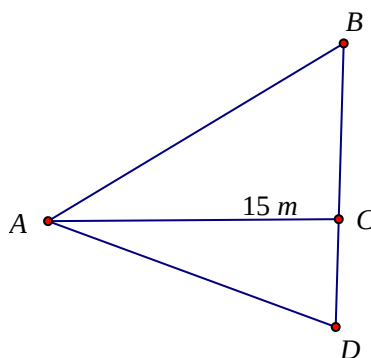


Sau 2h hai tàu **cách** nhau: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A = 7600(km)$

Câu 12: Một người quan sát đứng cách một cái tháp $15m$, nhìn thấy đỉnh tháp một góc 45° và nhìn dưới chân tháp một góc 15° so với phương nằm ngang như trong hình vẽ. Tính chiều cao h của tháp.

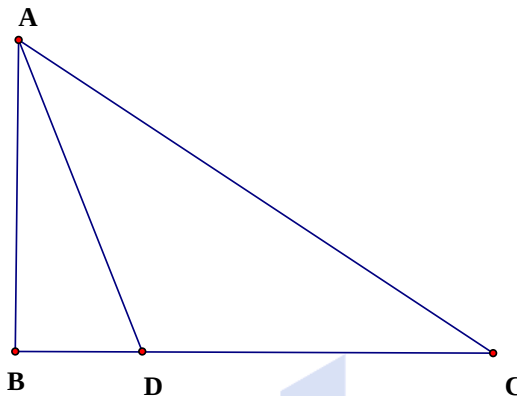


Lời giải


$$CD = AC. \tan DAC = 15. \tan 15^\circ = 15(2 - \sqrt{3}) \text{ (m)}$$

Vậy chiều cao của tháp là $45 - 15\sqrt{3}$ (m).

Lời giải

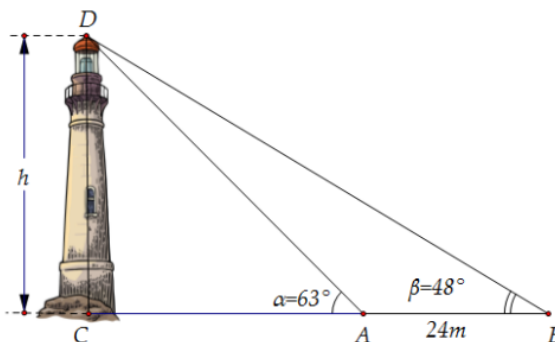


Áp dụng định lý sin trong tam giác ACD ta có:

$$\frac{AD}{\sin 43^\circ} = \frac{CD}{\sin 24^\circ} \Rightarrow AD = \frac{30 \cdot \sin 43^\circ}{\sin 24^\circ} \approx 50,30(m)$$

Trong tam giác vuông BAD ta có $\sin 67^\circ = \frac{AB}{AD} \Rightarrow AB = 50,30 \cdot \sin 67^\circ = 46,30(m)$

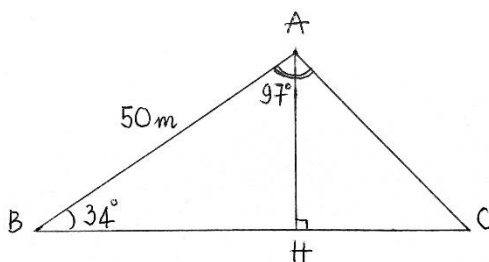
Câu 14: Giả sử $CD = h$ là chiều cao của tháp trong đó C là chân tháp. Chọn hai điểm A, B trên mặt đất sao cho ba điểm A, B, C thẳng hàng. Ta đo được $AB = 24m$, $CAD = 63^\circ$, $CBD = 48^\circ$. Tính chiều cao h của cái tháp.



Ta có: $DAB + DAC = 180^\circ \Rightarrow DAB = 117^\circ$

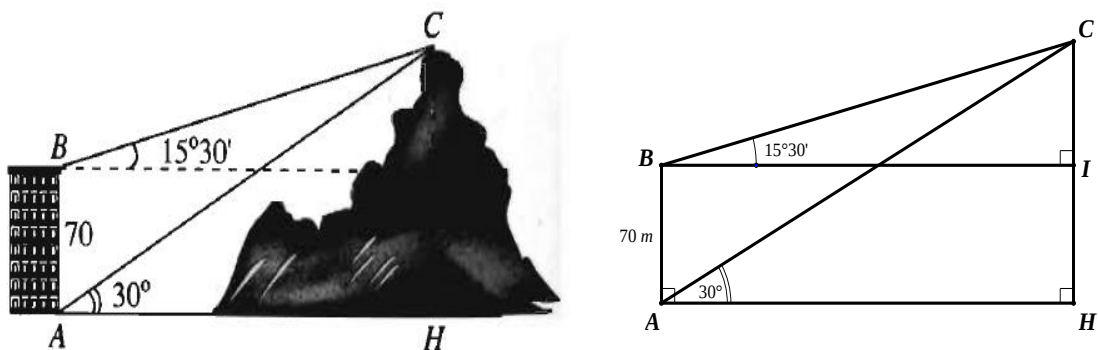
$$DAB + ADC + B = 180^\circ \Leftrightarrow ADC = 15^\circ$$

Tam giác DCA vuông tại C: $DC = AD \cdot \sin DAC = \frac{24 \cdot \sin 48^\circ}{\sin 15^\circ} \cdot \sin 63^\circ \approx 61,4m$

$$\cos HAC = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AC = \frac{AH}{\cos HAC} = \frac{50 \cdot \sin 34^\circ}{\cos 41^\circ} \approx 37(m)$$


Áp dụng định lí sin ta có $\frac{BC}{\sin A} = 2R \Leftrightarrow R = \frac{BC}{2\sin A} = \frac{28}{2\sin 120^\circ} = \frac{28\sqrt{3}}{3} \approx 16,17cm$

Câu 17: Từ hai vị trí A và B của một tòa nhà, người ta quan sát đỉnh C của ngọn núi. Biết rằng độ cao $AB = 70\text{ m}$, phương nhìn AC tạo với phương nằm ngang một góc 30° , phương nhìn BC tạo với phương nằm ngang một góc $15^\circ 30'$ (như hình vẽ). Tính độ cao CH của ngọn núi so với mặt đất.



Lời giải

Ta có: $\angle ABC = 90^\circ + 15^\circ 30' = 105^\circ 30'$.

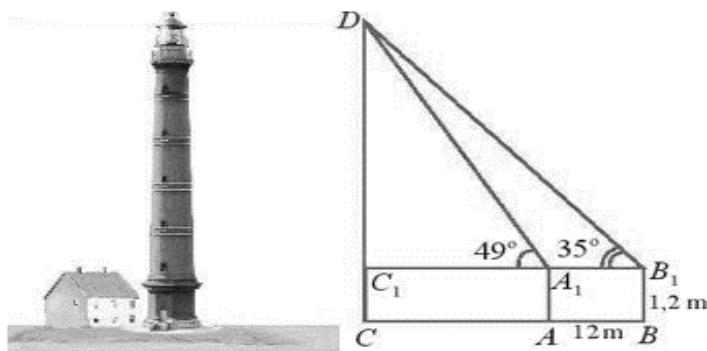
$$\angle ACB = 180^\circ - \angle ABC - \angle BAC = 180^\circ - 60^\circ - 105^\circ 30' = 14^\circ 30'.$$

+ Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC , ta có:

$$\frac{AC}{\sin \angle ABC} = \frac{AB}{\sin \angle ACB} \Rightarrow AC = \frac{70 \cdot \sin 105^\circ 30'}{\sin 14^\circ 30'}.$$

$$+ \text{ Lại có: } \sin \angle CAH = \frac{CH}{AC} \Rightarrow CH = AC \cdot \sin 30^\circ = \frac{70 \cdot \sin 105^\circ 30'}{\sin 14^\circ 30'} \cdot \sin 30^\circ \approx 134,7\text{ m}.$$

Câu 18: Muốn đo chiều cao của một ngọn tháp, người ta lấy hai điểm A, B trên mặt đất có khoảng cách $AB = 12\text{ m}$ cùng thẳng hàng với chân C của tháp để đặt hai giác kế. Chân của hai giác kế có chiều cao $h = 1,2\text{ m}$. Gọi D là đỉnh của tháp và hai điểm A_1, B_1 cùng thẳng hàng với C_1 thuộc chiều cao CD của tháp (như hình vẽ minh họa bên dưới). Người ta đo được $\angle DA_1C_1 = 49^\circ, \angle DB_1C_1 = 35^\circ$. Tính chiều cao CD của tháp.



Lời giải

Ta có: $\angle B_1A_1D = 180^\circ - 49^\circ = 131^\circ$,

Nên $CD = CC_1 + C_1D \approx 22,67(m)$.

13 | Ths. Lê Việt – THPT Thăng Long, Hà Nội – Phone: 0835221183 - Ôn thi cam kết điểm số

Diagram for Question 10: A right triangle ABC with the right angle at B . Point H is on segment AB such that $AH = 4$ and $HB = 20$. Angle HCA is 45° .

Trong tam giác AHB , ta có $\tan ABH = \frac{AH}{BH} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} \rightarrow ABH \approx 11^\circ 19'$.

$$\text{Suy ra } \angle ACB = 180^\circ - (\angle BAC + \angle ABC) = 56^\circ 19'$$
$$\frac{AB}{\sin ACB} = \frac{CB}{\sin BAC} \rightarrow CB = \frac{AB \cdot \sin BAC}{\sin ACB} \approx 17m.$$

Từ hình vẽ, suy ra $BAC = 10^\circ$ và $ABD = 180^\circ - (BAD + ADB) = 180^\circ - (50^\circ + 90^\circ) = 40^\circ$.

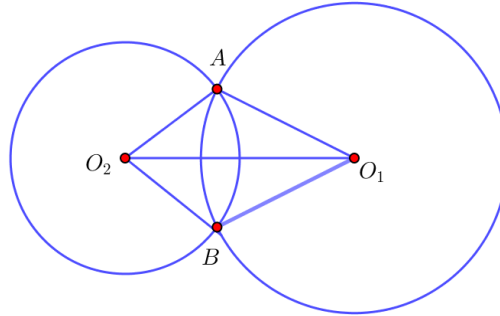
$$\frac{BC}{\sin BAC} = \frac{AC}{\sin ABC} \longrightarrow AC = \frac{BC \cdot \sin ABC}{\sin BAC} = \frac{5 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 10^\circ} \approx 18,5m.$$

Trong tam giác vuông ADC , ta có $\sin CAD = \frac{CD}{AC} \longrightarrow CD = AC \cdot \sin CAD = 11,9m.$

14 | Ths. Lê Việt – THPT Thăng Long, Hà Nội – Phone: 0835221183 - Ôn thi cam kết điểm số

Câu 23: Người ta xây một sân khấu với sân có dạng của hai hình tròn giao nhau. Bán kính của hai hình tròn là 20 m và 15 m. Khoảng cách giữa hai tâm của hai hình tròn là 30 m. Chi phí làm mỗi mét vuông phần giao nhau của hai hình tròn là 300 nghìn đồng và chi phí làm mỗi mét vuông phần còn lại là 100 nghìn đồng. Hỏi số tiền làm mặt sân khấu là bao nhiêu?

Lời giải



Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm của hai đường tròn bán kính 20 m và 15 m. A, B là hai giao điểm của hai đường tròn.

Ta có $O_1A = O_1B = 20$ m; $O_2A = O_2B = 15$ m; $O_1O_2 = 30$ m.

$$\cos \angle BO_1O_2 = \frac{O_1B^2 + O_1O_2^2 - O_2B^2}{2O_1B \cdot O_1O_2} = \frac{43}{48} \Rightarrow \angle BO_1O_2 \approx 26^\circ 23'.$$

Theo tính chất hai đường tròn cắt nhau ta có O_1O_2 là tia phân giác $\angle AO_1B$

$$\Rightarrow \angle AO_1B = 2\angle BO_1O_2 = 52,77^\circ.$$

Suy ra diện tích hình quạt tròn O_1AB là $S_{O_1AB} = \pi \cdot 20^2 \cdot \frac{52,77}{360} \approx 184,2 (\text{m}^2).$

$$S_{\Delta O_1AB} = \frac{1}{2} O_1A \cdot O_1B \cdot \sin \angle AO_1B \approx 159,2 (\text{m}^2).$$

Gọi S_1 là diện tích hình giới hạn bởi dây AB và cung AmB trong đường tròn (O_1).

$$\Rightarrow S_1 = S_{O_1AB} - S_{\Delta O_1AB} = 25 (\text{m}^2).$$

Chứng minh tương tự ta được diện tích hình giới hạn bởi dây AB và cung AmB trong đường tròn (O_2) là $S_2 \approx 35 (\text{m}^2).$

Suy ra diện tích phần giao nhau là $S = S_1 + S_2 = 60 (\text{m}^2).$

$\Rightarrow$ Chi phí làm sân khấu phần giao nhau $60 \cdot 300000 = 18000000$ (nghìn đồng).

Tổng diện tích của hai hình tròn là $S' = \pi 20^2 + \pi 15^2 \approx 1963 (\text{m}^2).$

Diện tích phần không giao nhau là $S' - S = 1903 (\text{m}^2).$

$\Rightarrow$ Chi phí làm sân khấu phần không giao nhau $1903 \cdot 100000 = 190300000$ (nghìn đồng).

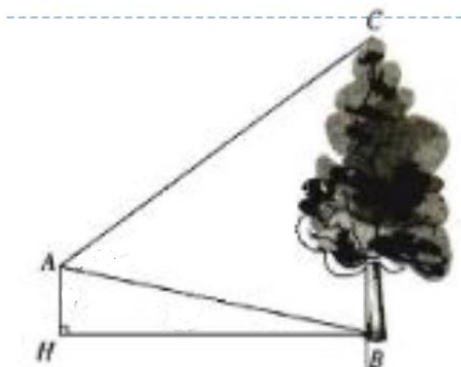
Số tiền làm mặt sân là $18\,000\,000 + 190\,000\,000 = 208\,300\,000$ (nghìn đồng)

$= 208,3$ (triệu đồng).

Câu 24: Trong chương trình “Gặp nhau cuối tuần”, nghệ sĩ Hải Xuân Bắc đặt ra một tình huống cho giáo sư Cù Trọng Xoay như sau: “Một người có chiều cao từ chân đến mắt là $1,6m$. Người đó dùng thước và giác kế đo được khoảng cách từ người này đứng cách một cái cây $10m$ và người đó nhìn ngọn cây và gốc cây một góc 30^0 ” Vậy chiều cao của cái cây là bao nhiêu?

- A.** 5,78m. **B.** 6,22m. **C.** 3,42m. **D.** 5,42m.

Lời giải



Ta có: $AH = 1,6m$; $HB = 10m$, $BAC = 30^0$

Trong tam giác AHB có: $\tan ABH = \frac{AH}{BH} = \frac{1,6}{10} = 0,16 \Rightarrow ABH = 9^{\circ}5'$

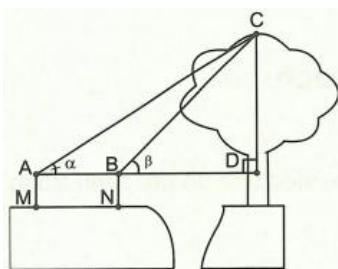
Suy ra $ABC = 90^0 - ABH = 80^055'$

Suy ra $\angle ACB = 180^\circ - (\angle BAC + \angle ABC) = 69^\circ 5'$

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC có:

$$\frac{AB}{\sin ACB} = \frac{CB}{\sin BAC} \Rightarrow CB = \frac{AB \cdot \sin BAC}{\sin ACB} \approx 5,42m.$$

Câu 25: Muốn đo chiều cao của một cái cây mà không thể đến được gốc cây, người ta lấy hai điểm M, N trên mặt đất có khoảng cách $MN = 5$ m cùng thẳng hàng với gốc cây để đặt hai giác kế. Chân của giác kế có chiều cao $MA = NB = 1,2$ m. Lấy điểm D trên thân cây sao cho A, B, D thẳng hàng (tham khảo hình vẽ). Người ta đo được $CAD = \alpha = 36^\circ$ và $CBD = \beta = 41^\circ$.



Chiều cao của cây bằng

A. $h \approx 23,3$ m.

B. $h \approx 24,3$ m.

C. $h \approx 25,3$ m.

D. $h \approx 26,3$ m.

Lời giải

Ta có $\beta = \alpha + \angle ACB \Rightarrow \angle ACB = \beta - \alpha = 41^\circ - 36^\circ = 5^\circ$.

Áp dụng định lý sin vào tam giác CAB , ta có

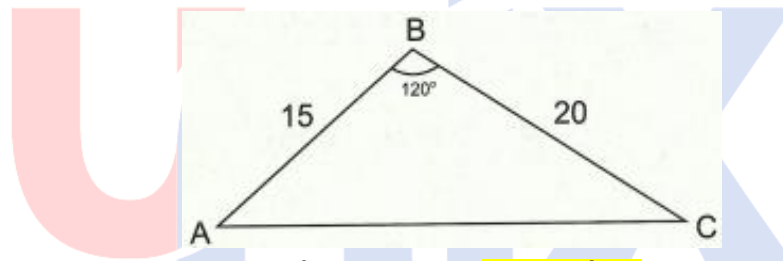
$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow BC = \frac{AB \cdot \sin A}{\sin C} = \frac{5 \cdot \sin 36^\circ}{\sin 5^\circ} \text{ (m)}.$$

Xét tam giác BCD vuông tại D , ta có

$$\sin B = \frac{CD}{CB} \Rightarrow CD = CB \cdot \sin B = \frac{5 \cdot \sin 36^\circ}{\sin 5^\circ} \cdot \sin 41^\circ \approx 22,1 \text{ (m)}.$$

Vậy chiều cao của cái cây là $h \approx 22,1 + 1,2 = 23,3$ m.

Câu 26: Một ô tô muốn đi từ A đến C nhưng giữa A và C là một ngọn núi cao nên ô tô phải đi thành hai đoạn từ A đến B rồi từ B đến C , các đoạn đường tạo thành tam giác ABC có $AB = 15$ km, $BC = 20$ km và $\angle ABC = 120^\circ$ (Tham khảo hình vẽ bên dưới). Giả sử ô tô chạy 5km tốn một lít xăng, giá một lít xăng là 20.000 đồng. Nếu người ta làm một đoạn đường hầm xuyên núi chạy thẳng từ A đến C , khi đó ô tô chạy trên con đường này sẽ tiết kiệm được số tiền so với chạy trên đường cũ gần với số nào trong các số sau:



A. 92000 đồng.

B. 140000 đồng.

C. 18400 đồng.

D. 121600 đồng.

Lời giải

Quãng đường ô tô đi từ A đến C qua B là $S_1 = AB + BC = 15 + 20 = 35$ (km).

Áp dụng định lý cosin vào tam giác ABC , ta có

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC = 15^2 + 20^2 - 2 \cdot 15 \cdot 20 \cdot \cos 120^\circ = 925 \Rightarrow AC = 5\sqrt{37} \text{ (km)}.$$

Nếu đi theo đường hầm thì quãng đường ô tô đi ít hơn là $S = S_1 - AC = 35 - 5\sqrt{37} \approx 4,6$ (km).

Ô tô tiết kiệm được số tiền là $4,6 : 5 \cdot 20000 = 18400$ (đồng).

Câu 27: Lắp đường dây điện từ vị trí A đến vị trí B phải tránh một ngọn núi, do đó người ta phải nối thẳng đường dây từ vị trí A đến vị trí C dài 9 km rồi từ vị trí C đến vị trí B dài 5 km (xem hình vẽ). Biết góc tạo bởi hai đoạn dây AC và BC là 135° . Hỏi so với việc nối thẳng từ A đến B người ta đã tốn thêm bao nhiêu km dây (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

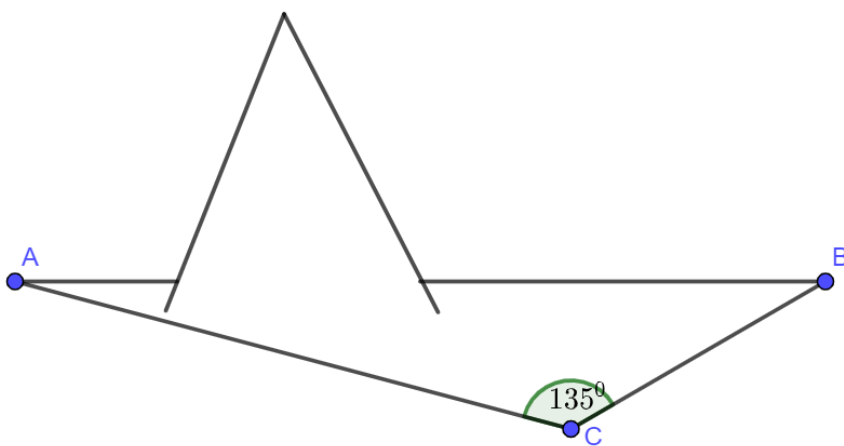
A. 0,6 km.

B. 1,32 km.

C. 7,5 km.

D. 0,98 km.

Lời giải



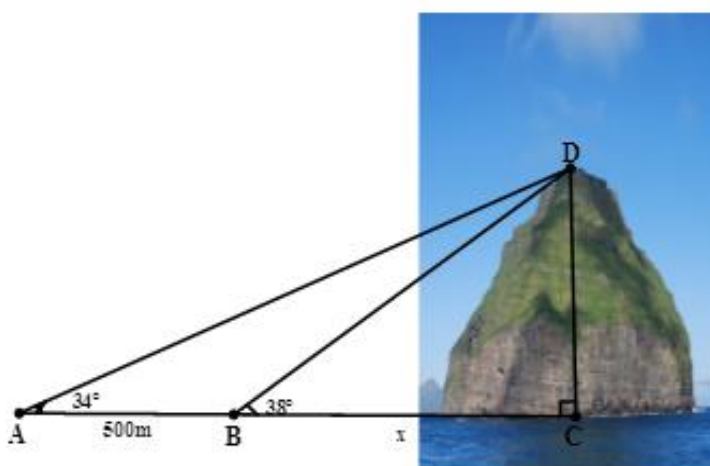
Theo định lý cosin ta có

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos 135^\circ$$

$$\Leftrightarrow AB^2 = 9^2 + 5^2 - 2 \cdot 9 \cdot 5 \cdot \cos 135^\circ \approx 169,64 \Rightarrow AB \approx 13,02 \text{ km.}$$

Vậy so với việc nối thẳng từ A đến B người ta đã tốn thêm khoảng $9 + 5 - 13,02 \approx 0,98 \text{ km.}$

Câu 28: Để đo chiều cao của một ngọn núi người ta đứng ở các vị trí A, B cách nhau $500m$ (như hình vẽ) và đo được các góc tại A và B lần lượt là 34° và 38° . Tính chiều cao của ngọn núi



A. 2667,7m.

B. 2647,7m.

C. 2467,7m.

D. 2447,7m.

Lời giải

Với $BC = x$ và chiều cao ngọn núi là $h = CD$

Trong tam giác vuông ACD ta có : $CD = \tan 34^\circ \cdot AC = \tan 34^\circ (x + 500)$

Mặt khác trong tam giác vuông BCD ta có : $CD = \tan 38^\circ \cdot BC = \tan 38^\circ \cdot x$

$$\text{Từ đây suy ra : } \tan 34^\circ (x + 500) = \tan 38^\circ \cdot x \Leftrightarrow x = \frac{500 \cdot \tan 34^\circ}{\tan 38^\circ - \tan 34^\circ}$$

19 | Ths. Lê Việt – THPT Thăng Long, Hà Nội – Phone: 0835221183 - Ôn thi cam kết điểm số

$$\begin{aligned}\frac{EF}{\sin C} &= \frac{CF}{\sin E} \\ \Leftrightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{6}}v}{\sin E} &= \frac{v\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sin 45^\circ} \\ \Leftrightarrow \sin E &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \Rightarrow \hat{E} &= 75^\circ \\ \Rightarrow \angle DCE &= 75^\circ\end{aligned}$$

Vậy sau va chạm viên bi B_2 chuyển động theo hướng hợp với hướng chuyển động ban đầu của viên bi B_1 một góc 75° .

Câu 30: Tỉnh A và B bị ngăn cách nhau bởi một ngọn núi. Để đi từ tỉnh A đến tỉnh B, người ta đi theo lộ trình từ tỉnh A qua tỉnh C, rồi đến tỉnh B. Biết rằng lộ trình từ A đến C dài 70km, từ C đến B dài 100km, và hai con đường tạo với nhau góc 60° , cứ mỗi 20km quãng đường thì phương tiện tiêu hao 1 lít nhiên liệu.

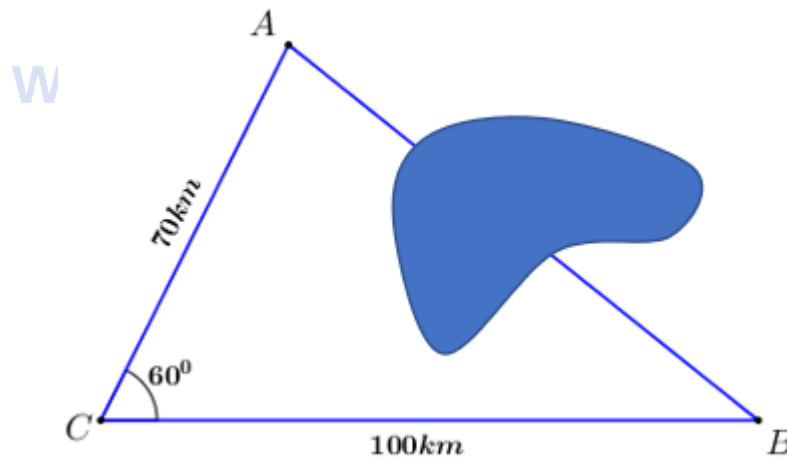
a. Tính thể tích nhiên liệu bị tiêu hao để di chuyển từ tỉnh A đến tỉnh B.

b. Người ta làm một đường hầm xuyên núi để đi từ tỉnh A đến tỉnh B, hỏi nếu đi theo đường hầm thì phương tiện tiết kiệm được bao nhiêu lít nhiên liệu?

Lời giải:

a) Tổng quãng đường mà phương tiện di chuyển từ A qua C đến B là: $70+100=170\text{km}$.
 Thể tích nhiên liệu bị tiêu hao là: $170:20=8.5$ lít

b)



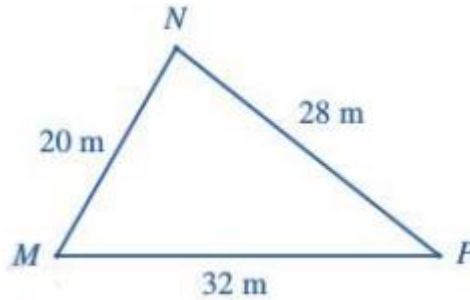
Áp dụng định lí hàm số cosin trong tam giác ABC :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos 60^\circ = 7900 \Rightarrow AB = 10\sqrt{79} \text{ km}$$

Thể tích nhiên liệu bị tiêu hao là: $10\sqrt{79}:20 = \frac{\sqrt{79}}{2} \approx 4.44$ lít.

Thể tích nhiên liệu tiết kiệm được: $8.5 - 4.44 = 4.06$ lít.

Câu 31: Gia đình bạn An cần mua gạch lát sân chơi hình tam giác có chiều dài các cạnh là 20m, 28m, 32m. Giá thành gạch là 150000đồng/ m^2 .



Hỏi gia đình bạn An cần chi bao nhiêu tiền mua gạch (làm tròn đến hàng nghìn)?

- A. 47505000 (đồng). B. 48000000 (đồng).
 C. 41569000 (đồng). D. 40000000 (đồng).

Lời giải

Nửa chu vi tam giác là: $p = \frac{20+28+32}{2} = 40(m)$

Diện tích tam giác là:

$$S = \sqrt{40(40-20)(40-28)(40-32)} = 160\sqrt{3}(m^2).$$

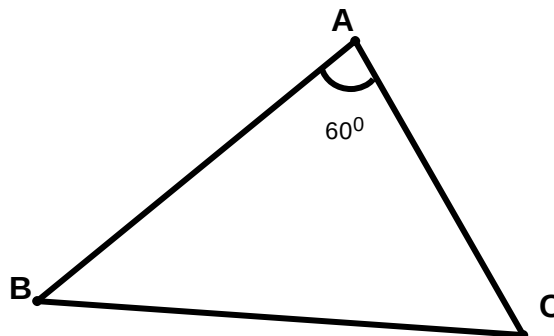
Vậy số tiền gia đình bạn An cần chi để mua gạch là:

$$160\sqrt{3} \times 150.000 \approx 41.569.000 (\text{đồng}).$$

Câu 32: Trong đợt bão Noru đổ bộ vào miền Trung năm 2022, có hai tàu đánh cá thuộc hai tỉnh cùng neo đậu tại một khu tránh trú bão. Sau khi bão tan, hai tàu cùng xuất phát về cảng cá quê nhà, đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc 60° . Tàu thứ nhất chạy với tốc độ $28km/h$, tàu thứ hai chạy với tốc độ $25km/h$. Sau 6 giờ, cả hai tàu cùng cập cảng của mình. Hỏi hai cảng cá cách nhau bao nhiêu km ?

- A. $168km$. B. $195,7km$. C. $150km$. D. $159,8km$.

Lời giải

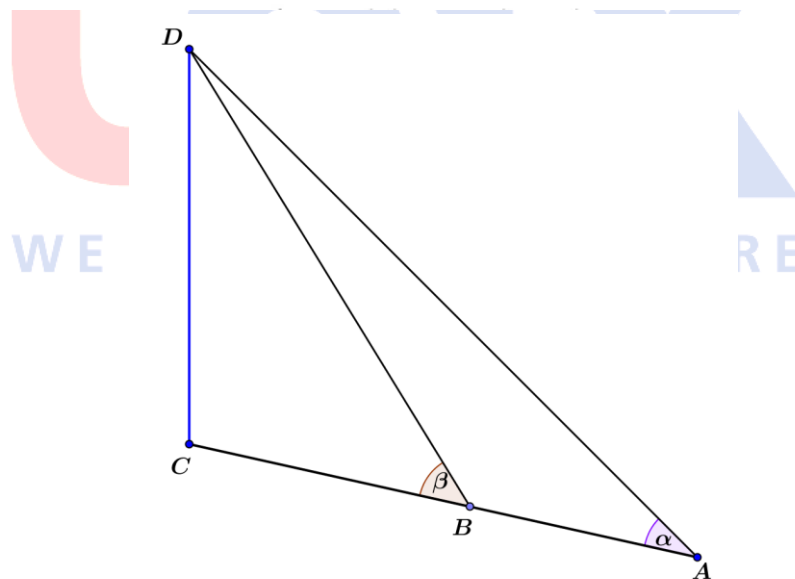


Xem vị trí trú bão là A, tàu thứ nhất xuất phát đến cảng B, tàu thứ hai xuất phát đến cảng C. Ta có: Sau 6 giờ quãng đường tàu thứ nhất chạy được là: $AB = 28.6 = 168km$.

Sau 6 giờ quãng đường tàu thứ hai chạy được là: $AC = 25.6 = 150km$.

Vậy hai cảng cá cách nhau là: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 60^\circ} = 6\sqrt{709}km \approx 159,8 km$.

Câu 33: Để đo chiều cao của một cái tháp trong hai cái tháp đôi của tỉnh Bình Định người ta gọi vị trí đứng ngắm là đỉnh D của thân tháp, C là hình chiếu của D trên mặt đất. Tại khu vực quan sát đặt cột tiêu ở vị trí A và vị trí B sao cho A, B, C thẳng hàng và đo được độ dài $AB = 10m$
 $CBD = \beta = 63^\circ$, $CAD = \alpha = 48^\circ$ (Tham khảo hình vẽ bên). Khi đó chiều cao $CD = h$ của tháp đôi gần với giá trị nào sau đây?



A. 24,7m.

B. 25m

C. 25,6m.

D. 26m

Lời giải

Xét tam giác ADB với $A = 48^\circ$ và $B = 180^\circ - 63^\circ = 117^\circ$.

Áp dụng công thức $D + B + A = 180^\circ \Rightarrow D = 180^\circ - (B + A) = 15^\circ$.

Áp dụng định lí Sin, ta được:

$$\frac{AB}{\sin D} = \frac{BD}{\sin A} \Rightarrow BD = \sin A \cdot \frac{AB}{\sin D} = \sin 48^\circ \cdot \frac{10}{\sin 15^\circ} \approx 28,7 \text{ m}$$

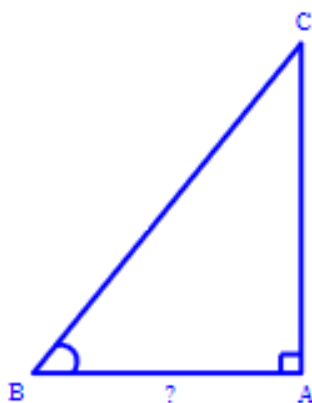
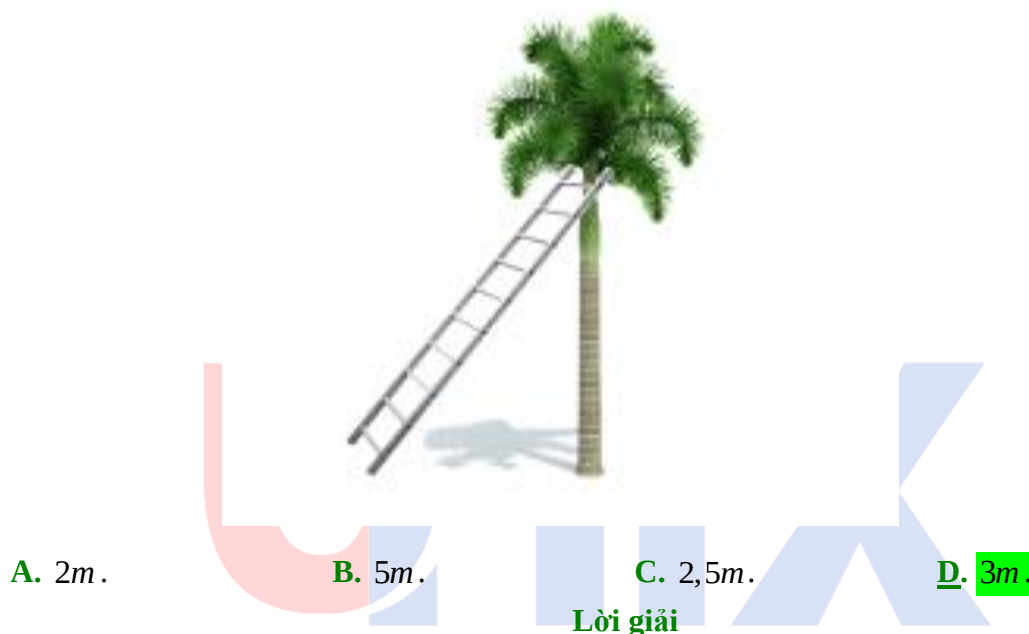
Xét tam giác BDC vuông tại C với $B = 63^\circ$ và $BD = 28,7$ m.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác BDC vuông tại C , ta được:

$$\sin B = \frac{DC}{BD} \Rightarrow DC = BD \cdot \sin B \approx 25,6 \text{ m.}$$

Vậy chiều cao tòa tháp gần với $h = 25,6$ m.

Câu 34: Để đo chiều cao của một cây Cau, người ta dùng một chiếc thang có chiều dài 5 m. Ta căn chỉnh sao cho đỉnh thang vào đúng vị trí thân Cau cần đo (giả sử trừ ngọn Cau). Lúc này ta đo chiều dài từ chân thang đến gốc cây Cau là 4 m. Hỏi chiều cao cây Cau là bao nhiêu?



Giả sử ngọn cây Cau (trừ ngọn) là điểm C , gốc cây Cau là đỉnh A và chân thang là điểm B .

Khi đó, áp dụng định lý Pitago cho tam giác ABC ta có:

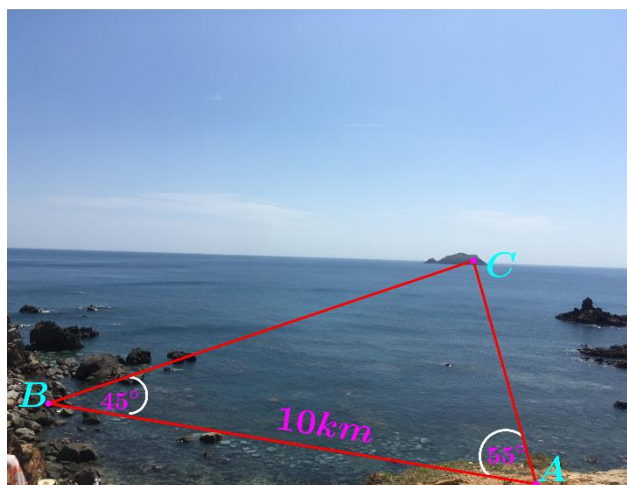
$$AC^2 = BC^2 - AB^2 \Leftrightarrow AC^2 = 5^2 - 4^2 = 9 \Rightarrow AC = 3 \text{ m.}$$

Câu 35: Để đo khoảng cách từ làng chài Mỹ Quang vị trí A (xã An Chấn, huyện Tuy An, Tuy Hòa) ra Hòn Chùa vị trí C , người ta chọn vị trí B trên đất liền sao cho khoảng cách giữa A và B là 10

km và tại hai vị trí này đều nhìn ra được Hòn Chùa

C. Biết rằng $CAB = 55^\circ$, $CBA = 45^\circ$.

Khoảng cách từ A đến C gần nhất giá trị nào sau đây?



A. 8,1km.

B. 7,2km.

C. 8,5km.

D. 7,5km.

Lời giải

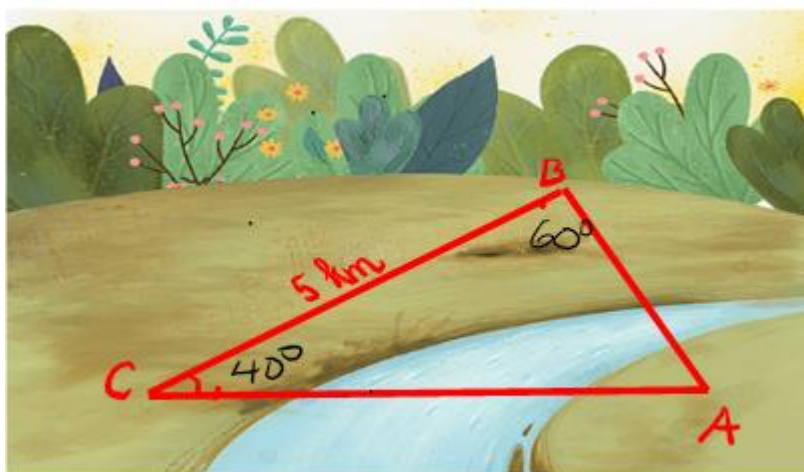
Từ hình ảnh, ta có: $ACB = 180^\circ - (A + B) = 80^\circ$

Áp dụng định lý sin cho tam giác ABC, ta được:

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow AC = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{10 \cdot \sin 45^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 7,2 \text{ (km)}.$$

Vậy, khoảng cách từ làng chài Mỹ Quang đến Hòn Chùa khoảng 7,2 km.

Câu 36: Nhà bạn Bình và nhà bạn Chung cách trường học một con suối. Hàng ngày Bình và Chung phải đi học qua con suối sang bên kia suối. Biết nhà hai bạn cách nhau 5km, tại vị trí nhà bạn Bình đo được góc nghiêng so với bờ suối tới vị trí trường học là 60° , nhà bạn Chung đo được góc nghiêng so với bờ suối tới vị trí trường học là 40° . Khi đó, khoảng cách từ nhà bạn Bình và bạn Chung tới trường học lần lượt dài là



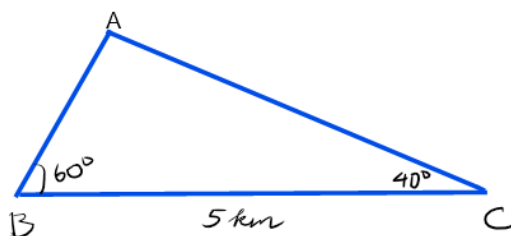
A. 4,4km và 3,3km.

B. 2km và 3km.

C. 3,3km và 4,4km.

D. 2,3km và 3,5km.

Lời giải



Ta có, $A = 180^\circ - 60^\circ - 40^\circ = 80^\circ$

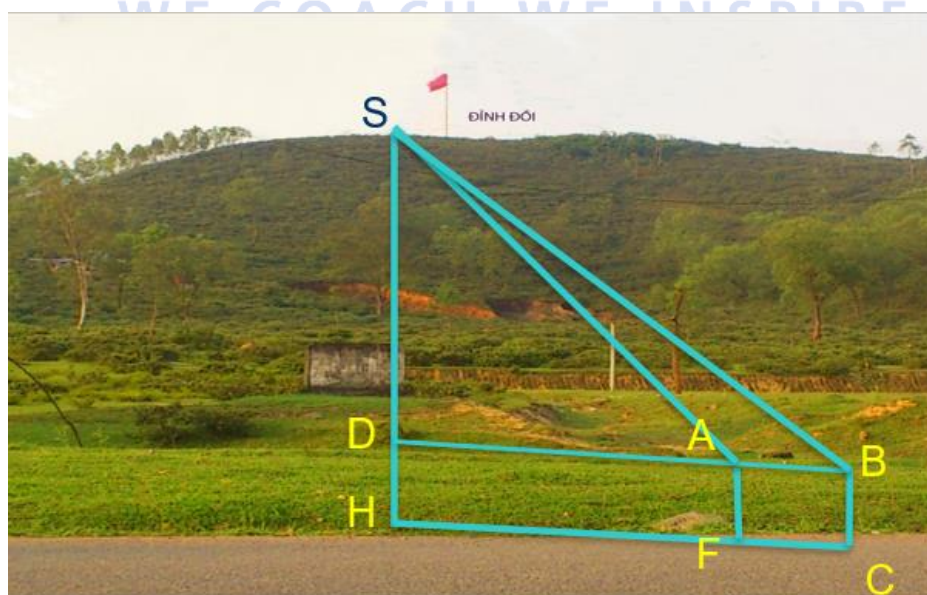
Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC , ta có $\frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$.

$$\text{Do đó: } AC = \frac{BC \cdot \sin B}{\sin A} = \frac{5 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 4,4(km).$$

$$AB = \frac{BC \cdot \sin C}{\sin A} = \frac{5 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 3,3(km).$$

Vậy khoảng cách từ nhà của bạn Chung tới trường dài $4,4km$ và khoảng cách từ nhà của bạn Bình tới trường dài $3,3km$

Câu 37: Cạnh Ngã ba Đồng Lộc (Hà Tĩnh), còn có một quả đồi, giờ đây được đặt tên là đồi La Thị Tám, để ghi nhận hành động dũng cảm của một cô gái, may mắn còn sống sau những ngày chiến tranh khốc liệt, đó là nữ anh hùng La Thị Tám. Để đo độ cao SH của quả đồi so với mặt đường, một nhóm học sinh đã tiến hành đo đạc tại vị trí A và B . Biết rằng độ cao $AF = 1,3m$. khoảng cách $AB = 40m$, phương nhìn AS tạo với phương nằm ngang 1 góc 13° , phương nhìn BS tạo với phương nằm ngang góc 11° . Hỏi quả đồi cao bao nhiêu mét so với mặt đường?



A. $48m$.

B. $55m$.

C. $50m$.

D. $45m$.

Lời giải

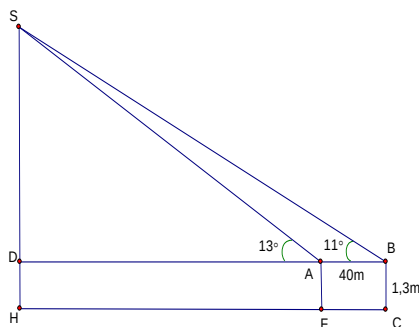
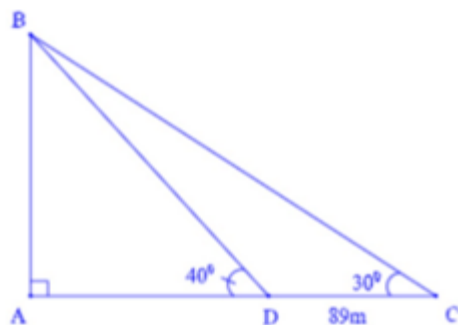

$$\frac{SA}{\sin 11^\circ} = \frac{AB}{\sin 2^\circ} \Rightarrow SA = 40 \cdot \frac{\sin 11^\circ}{\sin 2^\circ}$$
$$SD = SA \cdot \sin 13^\circ \Rightarrow SD = 40 \cdot \frac{\sin 11^\circ}{\sin 2^\circ} \cdot \sin 13^\circ \Rightarrow SH = 40 \cdot \frac{\sin 11^\circ}{\sin 2^\circ} \cdot \sin 13^\circ + 1,3 \approx 50m.$$

Diagram illustrating the relative motion of two planes, A and B, starting from point O. Plane A flies North at 800 km/h, and Plane B flies South at 600 km/h. The angle between their paths is 45 degrees.

Ta có: $AOB = 180^\circ - 45^\circ - 15^\circ = 120^\circ$; $OA = 800.3 = 2400$; $OB = 600.3 = 1800$

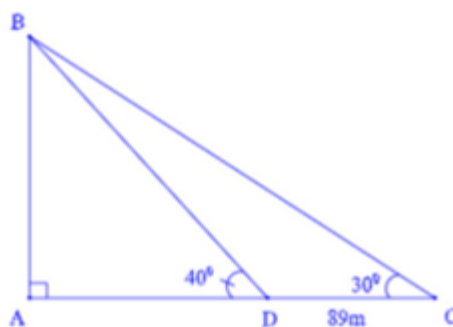
$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos AOB}$$
$$= \sqrt{2400^2 + 1800^2 - 2.2400.1800.\cos 120^\circ} \approx 3650 \text{ (km)}$$

Câu 39: Để đo chiều cao AB của một cái tháp, người ta chọn hai điểm C, D trên mặt đất cách nhau $89m$. Từ C, D lần lượt nhìn lên đỉnh B của tháp dưới các góc lần lượt là 30° và 40° (tham khảo hình vẽ).



Tính chiều cao của tháp?

Lời giải



Ta có $\triangle ABD$ vuông tại A nên $AB = BD \cdot \sin 40^\circ$

Mà trong tam giác BCD có $\frac{BD}{\sin BCD} = \frac{CD}{\sin CBD} \Rightarrow BD = \frac{CD \cdot \sin BCD}{\sin CBD} = \frac{89 \cdot \sin 30^\circ}{\sin 10^\circ}$

Vậy $AB = BD \cdot \sin 40^\circ = \frac{89 \cdot \sin 30^\circ}{\sin 10^\circ} \cdot \sin 40^\circ \approx 164,72m.$