

IV

VECTƠ

Câu 32: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$ có chung đỉnh A . Chứng minh rằng $\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{D'D} = \vec{0}$

Lời giải

Theo quy tắc trừ và quy tắc hình bình hành ta có

$$\vec{VT} = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB'}) + (\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD'})$$

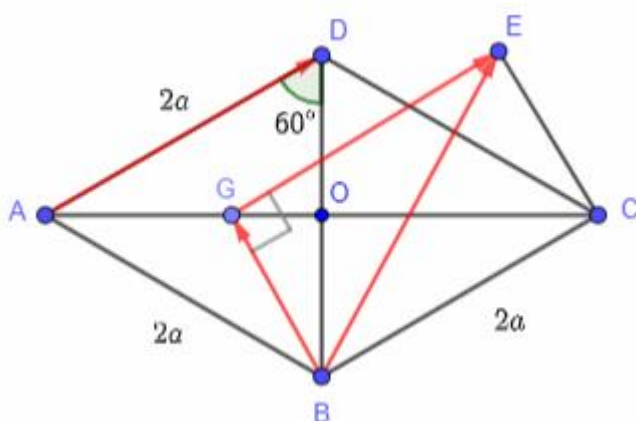
$$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC'} - (\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'})$$

$$= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC'} = \vec{0} = \vec{VP} \Rightarrow \text{DPCM}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{D'D} = \vec{0}.$$

Câu 33: Cho hình thoi $ABCD$ tâm O có cạnh bằng $2a$ và $ABC = 120^\circ$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD , tính độ dài của vector $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AD}$.

Lời giải



Cách 1.

Dựng hình bình hành $GBCE \Rightarrow \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BE}$.

Vì $ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

$$\begin{cases} ABC = 120^\circ \Rightarrow ABD = 60^\circ \\ AB = AD = 2a \end{cases} \Rightarrow \text{tam giác } ABD \text{ là tam giác đều.}$$

$$OA = OC = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

$$OG = \frac{1}{3}OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$GC = OG + OC = \frac{a\sqrt{3}}{3} + a\sqrt{3} = \frac{4a\sqrt{3}}{3}.$$

$GBCE$ là hình bình hành và $BG \perp BC \Rightarrow GBCE$ là hình chữ nhật $\Rightarrow BE = GC = \frac{4a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $|\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AD}| = \frac{4a\sqrt{3}}{3}$.

Vì $ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

$$\begin{cases} ABC = 120^\circ \Rightarrow ABD = 60^\circ \\ AB = AD = 2a \end{cases} \Rightarrow \text{tam giác } ABD, BCD \text{ là hai tam giác đều.}$$

Ta có $OC = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$, $OH = \frac{1}{3}OC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $OB = a$.

$$\Rightarrow BH = \sqrt{OB^2 + OH^2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy $|\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AD}| = \frac{4a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 34: Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH với $H \in BC$, $AB=3, AC=4$. Tính $T = |\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{AB}|$ với M là trung điểm AC .

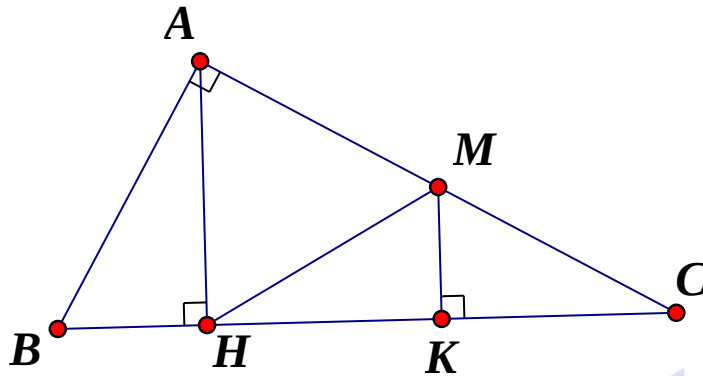
A. $\frac{\sqrt{163}}{10}$.

B. $\frac{\sqrt{263}}{5}$.

C. $\frac{\sqrt{163}}{5}$.

D. $\frac{\sqrt{63}}{5}$.

Lời giải



+) Áp dụng định lí Py-ta-go cho $\triangle ABC$: $BC = 5$.

Áp dụng hệ thức lượng cho $\triangle ABC$: $AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow BH = \frac{9}{5}$; $AC^2 = HC \cdot BC \Rightarrow HC = \frac{16}{5}$;

$$AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AH = \frac{12}{5}.$$

$$+) T = |\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{AB}| \Rightarrow T^2 = MH^2 + 2\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{AB} + AB^2.$$

$$+) \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KH})(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}) = \overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{KH} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{KH} \cdot \overrightarrow{HB}$$

$$\bullet \overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{AH} = MK \cdot AH \cdot \cos 0^\circ = \frac{1}{2} AH \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot \frac{144}{25} = \frac{72}{25}.$$

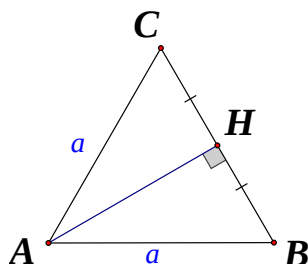
$$\bullet \overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{HB} = 0$$

$$\bullet \overrightarrow{KH} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$$

$$\bullet \overrightarrow{KH} \cdot \overrightarrow{HB} = KH \cdot HB \cdot \cos 0^\circ = KH \cdot HB = \frac{1}{2} HC \cdot HB = \frac{8}{5} \cdot \frac{9}{5} = \frac{72}{25}.$$

$$\text{Từ: } T^2 = 2^2 + 2 \cdot \left(\frac{72}{25} + \frac{72}{25} \right) + 3^2 = \frac{613}{25} \Rightarrow T = \frac{\sqrt{613}}{5}.$$

Câu 35: Cho tam giác đều ABC cạnh a , đường cao AH . Dựng vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$. Độ dài của $\vec{u}$ bằng

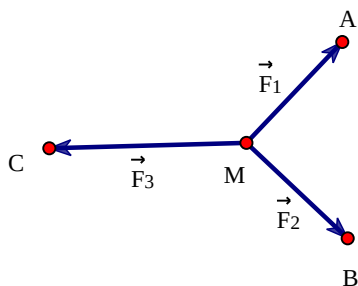


D. $\frac{a\sqrt{13}}{2}$.

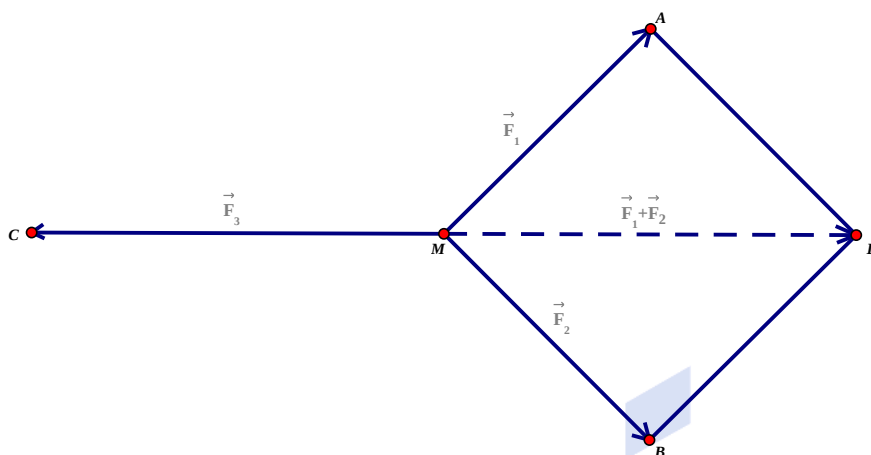
Chọn D

D. $a\sqrt{5}$.

Chọn D



Lời giải



Ta có: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{MA} + \vec{MB} = \vec{MD}$ (D là đỉnh thứ 4 của hình bình hành $MADB$)

Do vật đứng yên nên

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \Rightarrow |\vec{F}_3| = |-(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)| = |\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = MD = 100\sqrt{2}N$$

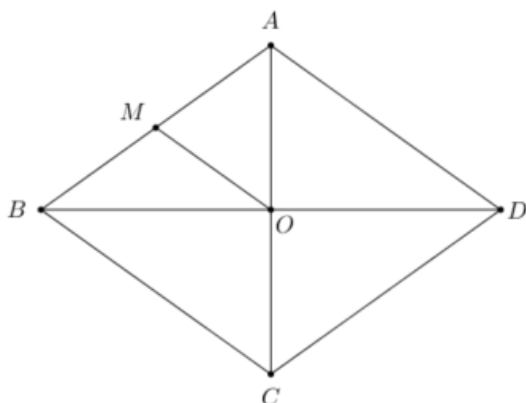
Vậy $|\vec{F}_3| = 100\sqrt{2}N$ cùng phương và ngược hướng với $\vec{MD}$.

Câu 38: Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 5$ và $BD = 7$. Tính $|\vec{CA} + \vec{DB}|$

- A. $|\vec{CA} + \vec{DB}| = 12$. B. $|\vec{CA} + \vec{DB}| = \sqrt{74}$. C. $|\vec{CA} + \vec{DB}| = \frac{\sqrt{74}}{2}$. D. $|\vec{CA} + \vec{DB}| = 2\sqrt{74}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} = 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = 2.2\overrightarrow{OM} = 4\overrightarrow{OM}$ với M là trung điểm AB

Câu 39: Cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có trọng tâm lần lượt là G và G' . Chứng minh rằng:
 $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$

a) Ta có: $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A'}$

$$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B'}$$

$$\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C'}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'} + (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}) + (\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'}) = 3\overrightarrow{GG'}$$

Câu 40: Cho tam giác ABC và điểm I thỏa mãn $2\vec{IA} + 5\vec{IB} = \vec{O}$. Chứng minh rằng: $\vec{CI} = \frac{2}{7}\vec{CA} + \frac{5}{7}\vec{CB}$.

Ta có:

$$2\overrightarrow{IA} + 5\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{O}$$

$$\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CI}) + 5(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CI}) = \overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow 7\overrightarrow{CI} = 2\overrightarrow{CA} + 5\overrightarrow{CB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CI} = \frac{2}{7}\overrightarrow{CA} + \frac{5}{7}\overrightarrow{CB}$$

$$\textbf{Vây } \overrightarrow{CI} = \frac{2}{7}\overrightarrow{CA} + \frac{5}{7}\overrightarrow{CB}.$$

Câu 41: Cho hình bình hành $ABCD$ có M là trung điểm DC , G là trọng tâm tam giác ABC . Gọi H thuộc tia đối của tia BC . Biết G, H, M thẳng hàng. Tính $\frac{HC}{HB}$.

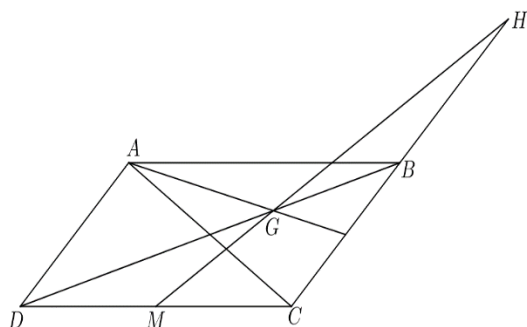
A. 2.

B. 1.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải



Gọi $\overrightarrow{BH} = x\overrightarrow{BC}$.

$$+) \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{CD}.$$

$$+) \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB} + x\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}) + x\overrightarrow{BC} = \left(\frac{1}{3} - x\right)\overrightarrow{CB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$$

Vì Ba điểm M, G, H thẳng hàng nên $\overrightarrow{GH}, \overrightarrow{MG}$ cùng phương

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{3} - x}{\frac{2}{3}} = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{6}} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{3} - x}{\frac{2}{3}} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{3} - x = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = -1.$$

Vậy $\frac{HC}{HB} = 2$.

Câu 42: Cho hình thoi $ABCD$ có độ dài cạnh bằng $2a$, góc $ABC = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của BC . N là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$. Độ dài vector $\overrightarrow{NA}$ bằng

A. $a\sqrt{3}$.

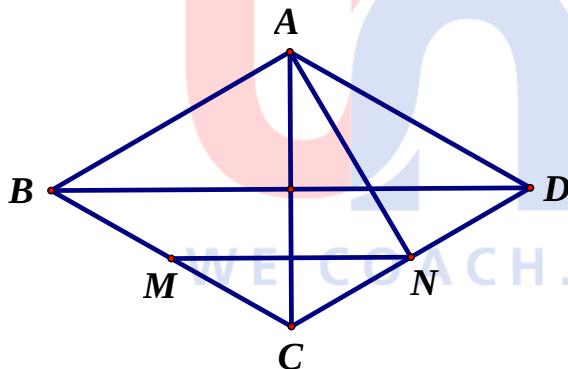
B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $2a\sqrt{3}$.

D. a .

Lời giải

Chọn A



Ta có $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

Mặt khác M là trung điểm của BC nên N là trung điểm của CD .

Vì $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, $ABC = 60^\circ$ nên tam giác ABC là tam giác đều. Suy ra tam giác ACD là tam giác đều cạnh $2a$.

Khi đó AN là đường trung tuyến trong tam giác đều cạnh $2a$ nên $AN = a\sqrt{3}$.

Vậy $|\overrightarrow{NA}| = AN = a\sqrt{3}$.

Câu 43: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 1. Độ dài của véc-tơ $\vec{u} = 3\overrightarrow{AC} - 7\overrightarrow{AB}$ là

A. $|\vec{u}| = 5$.

B. $|\vec{u}| = 12\sqrt{2} - 7$.

C. $|\vec{u}| = 17$.

D. $|\vec{u}| = 13$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\vec{u} = 3\overrightarrow{AC} - 7\overrightarrow{AB} = 3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) - 7\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{BC} - 4\overrightarrow{AB}$

Vì $ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng 1 suy ra $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ và $\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 = 1$.

Câu 44: Cho tam giác ABC , D là điểm thuộc cạnh BC sao cho $DC = 2DB$. Biết $\overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$.

Ta có: $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Câu 45: Cho hình vuông $ABCD$, Gọi I là trung điểm của đoạn CD , J là giao điểm của AC và BI . Phân tích $\overrightarrow{IJ}$ theo hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

A square with vertices labeled A (top-left), B (top-right), C (bottom-right), and D (bottom-left). Diagonals AC and BD intersect at point J . A line segment is drawn from vertex B to point I on side DC , passing through point J .

35 | **Ths. Lê Việt – THPT Thăng Long, Hà Nội – Phone: 0835221183 - Ôn thi cam kết điểm số**

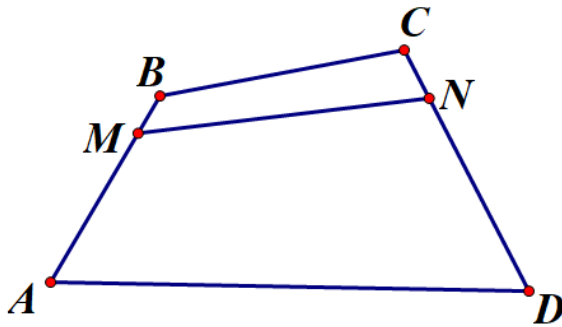
36 | **Ths. Lê Việt – THPT Thăng Long, Hà Nội – Phone: 0835221183 - Ôn thi cam kết điểm số**

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BG}.$$

Câu 51: Cho tứ giác $ABCD$. Điểm M thuộc cạnh AB , điểm N thuộc cạnh CD và thỏa mãn $\frac{MA}{MB} = \frac{ND}{NC} = 4$. Khẳng định nào sau đây là đúng khi phân tích $\overrightarrow{MN}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$?

- A.** $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AD} + \frac{4}{5}\overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AD} - \frac{4}{5}\overrightarrow{BC}$.
C. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$. **D.** $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} - \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.

Lời giải



Vì điểm M thuộc đoạn AB , N thuộc đoạn CD và thỏa mãn $\frac{MA}{MB} = \frac{ND}{NC} = 4$ nên suy ra

$$\overrightarrow{MA} = -4\overrightarrow{MB} \text{ hay } \overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0} \text{ và } \overrightarrow{DN} = -4\overrightarrow{CN} \text{ hay } \overrightarrow{DN} + 4\overrightarrow{CN} = \vec{0}.$$

Ta có

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN},$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MN} = 4\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{BC} + 4\overrightarrow{CN}.$$

Cộng và về theo về ta được

$$5\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB}) + \overrightarrow{AD} + 4\overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{DN} + 4\overrightarrow{CN})$$

$$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{MN} = \vec{0} + \overrightarrow{AD} + 4\overrightarrow{BC} + \vec{0}$$

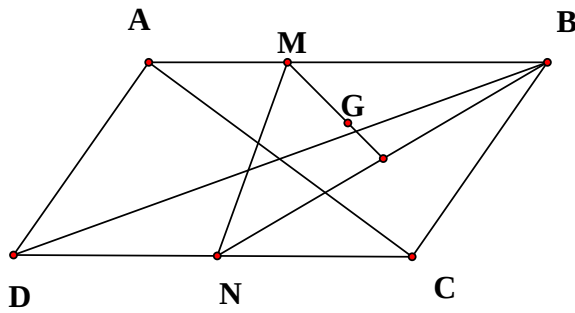
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AD} + \frac{4}{5}\overrightarrow{BC}.$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AD} + \frac{4}{5}\overrightarrow{BC}.$$

Câu 52: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là hai điểm nằm trên hai cạnh AB và CD sao cho $AB = 3AM$, $CD = 2CN$ và G là trọng tâm tam giác MNB . Phân tích các vectơ $\overrightarrow{AG}$ qua các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ ta được kết quả $\overrightarrow{AG} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$, hãy chọn đáp án đúng?

- A.** $m - n = -\frac{1}{18}$. **B.** $m - n = -\frac{1}{6}$. **C.** $m - n = -\frac{1}{8}$. **D.** $m - n = \frac{1}{6}$.

Lời giải



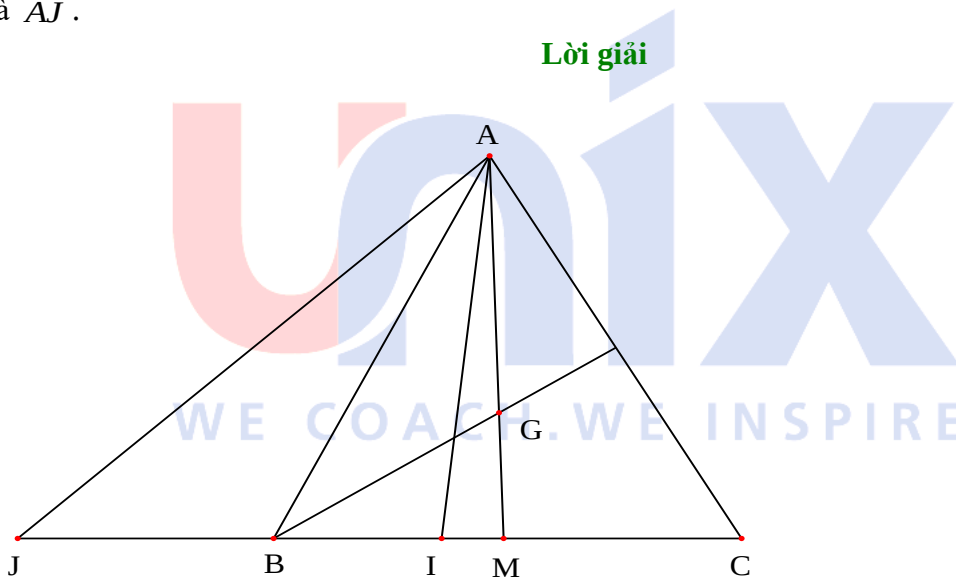
Do G là trọng tâm tam giác MNB nên ta có:

$$3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

Suy ra $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{18}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ và $m = \frac{5}{18}, n = \frac{1}{3} \Rightarrow m - n = -\frac{1}{18}.$

Câu 53: Cho ΔABC . Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI = 3BI$ và J là điểm trên BC kéo dài sao cho $5JB = 2JC$. Gọi G là trọng tâm của ΔABC . Hãy phân tích véc tơ $\overrightarrow{AG}$ theo hai véc tơ $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AJ}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BC . Theo tính chất trọng tâm của tam giác ta có

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \quad (1).$$

Theo giả thiết ta có:

$$2\overrightarrow{CI} = -3\overrightarrow{BI} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AC}) = -3(\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AB}) \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AI} \quad (2).$$

$$5\overrightarrow{JB} = 2\overrightarrow{JC} \Leftrightarrow 5(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AJ}) = 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AJ}) \Leftrightarrow 5\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AJ} \quad (3).$$

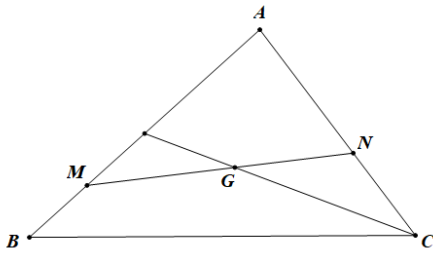
Từ (2) và (3) ta có hệ

$$\begin{cases} 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AI} \\ 5\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AJ} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = \frac{5}{8}\overrightarrow{AI} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AJ} \\ \overrightarrow{AC} = \frac{25}{16}\overrightarrow{AI} - \frac{9}{16}\overrightarrow{AJ} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \frac{35}{16}\overrightarrow{AI} - \frac{3}{16}\overrightarrow{AJ} \quad (4).$$

Thay (4) vào (1) ta được $\overrightarrow{AG} = \frac{35}{48}\overrightarrow{AI} - \frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$.

Câu 54: Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Gọi M và N là các điểm lần lượt thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC}$, $k \in \mathbb{R}$. Tìm k để ba điểm M, N, G thẳng hàng.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GM} + 3(\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GM}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{GB}.$$

Lại có $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GN} - \overrightarrow{GA} = k(\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GA})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GN} = (1-k)\overrightarrow{GA} + k\overrightarrow{GC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GN} = (1-k)\overrightarrow{GA} + k(-\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GN} = (1-2k)\overrightarrow{GA} - k\overrightarrow{GB}.$$

Ba điểm M, N, G thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{GN}$ và $\overrightarrow{GM}$ cùng phương.

$$\text{Suy ra } \frac{1-2k}{\frac{1}{4}} = \frac{-k}{\frac{3}{4}} \Leftrightarrow k = \frac{3}{5}.$$

Cách 2:

Nếu $k = 0$ thì $N \equiv A$. Khi đó ba điểm M, G, N không thẳng hàng. Suy ra $k \neq 0$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{k}\overrightarrow{AN}\right) = \frac{4}{9}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{3k}\overrightarrow{AN}$$

Ba điểm G, M, N thẳng hàng khi và chỉ khi $\frac{4}{9} + \frac{1}{3k} = 1 \Leftrightarrow k = \frac{3}{5}$.

Câu 55: Cho tam giác ABC , M là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$. Trên các cạnh AC, BC lấy các điểm P, Q sao cho $CPMQ$ là hình bình hành. Lấy điểm N trên AQ sao cho $a\overrightarrow{NA} + b\overrightarrow{NQ} = \vec{0}$. Khi ba điểm B, N, P thẳng hàng thì $a + b$ bằng:

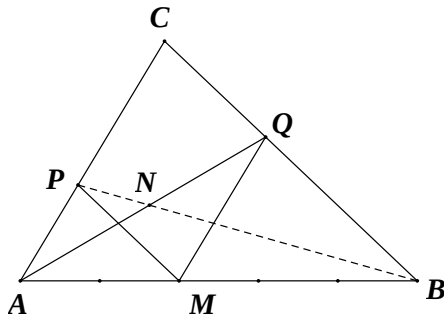
A. 1..

B. 19..

C. -1.

D. 29.

Lời giải



Vì $MP \parallel BC, MQ \parallel AC \Rightarrow \frac{AP}{AC} = \frac{CQ}{CB} = \frac{AM}{AB} = \frac{2}{5}$.

Ta có: $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AP}$.

Đặt $\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AQ}$. Suy ra: $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{5}x\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}x\overrightarrow{AP}$.

Do B, N, P thẳng hàng nên $\frac{2}{5}x + \frac{3}{2}x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{10}{19} \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{10}{19}\overrightarrow{AQ}$

Hay $\overrightarrow{AN} = \frac{10}{9}\overrightarrow{NQ} \Leftrightarrow 9\overrightarrow{NA} + 10\overrightarrow{NQ} = \vec{0}$. Vậy $a + b = 10 + 9 = 19$.

Câu 56: Cho $\triangle ABC$. Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn đẳng thức: $|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}|$.

Lời giải

Ta có: $|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}| \Leftrightarrow |3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{AB}|$

Giả sử điểm O thỏa mãn $3\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{OI} = \vec{0}$

(I là trung điểm AC). $2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{OI} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OI}$. Vậy, O là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABIO$

Khi đó:

$|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{AB}| \Leftrightarrow |3(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) - 2(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{AB}|$

$\Leftrightarrow |3\overrightarrow{MO} - 2\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MO}| = |\overrightarrow{AB}| \Leftrightarrow |2\overrightarrow{MO}| = |\overrightarrow{AB}| \Leftrightarrow MO = \frac{1}{2}AB$

Vậy, tập hợp điểm M là đường tròn tâm O bán kính $R = \frac{AB}{2}$

Câu 57: Cho tứ giác $ABCD$, M là điểm tùy ý, K là điểm thỏa mãn đẳng thức: $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = x\overrightarrow{MK}$, giá trị của x là

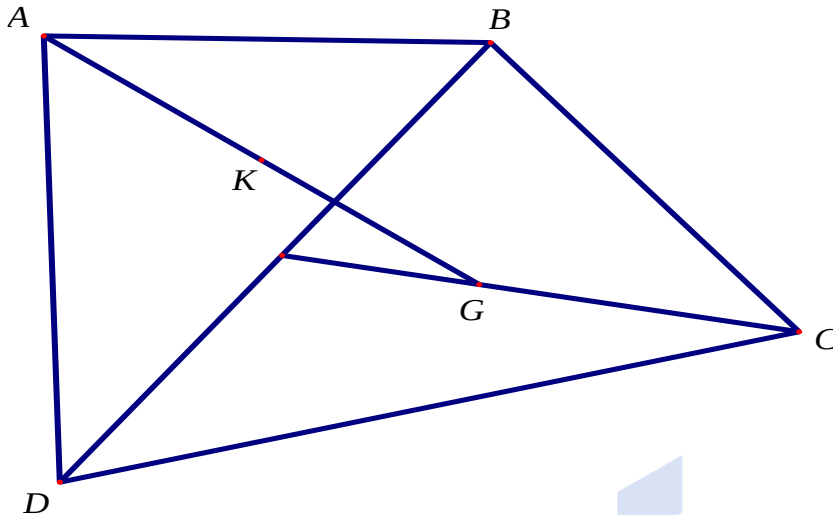
A. $x = 2$.

B. $x = 4$.

C. $x = 5$.

D. $x = 6$.

Lời giải



Vì đẳng thức $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = x\overrightarrow{MK}$ (1) xảy ra với mọi M nên đẳng thức đúng khi M trùng K .

Khi đó (1) trở thành $3\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = \vec{0}$ (2).

Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD , ta có $\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = 3\overrightarrow{KG}$, với mọi điểm K .

Từ (2), ta có $3\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KG} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KG} = \vec{0}$ suy ra K là trung điểm AG .

Với K là trung điểm của AG , ta có: $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 3(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KA}) + (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KB}) + (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KC}) + (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KD}) = 6\overrightarrow{MK} + (3\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD}) = 6\overrightarrow{MK}$.

Vậy $x = 6$.

Câu 58: Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng 10. Biết tập hợp các điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}|$ là một đường tròn. Hỏi đường tròn đó có bán kính bằng bao nhiêu?

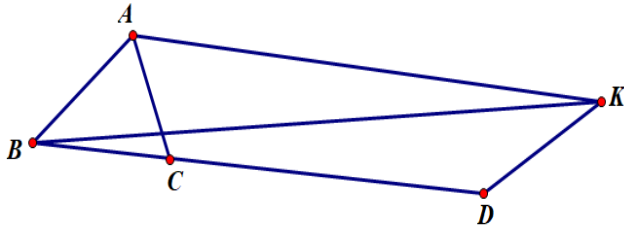
A. $\sqrt{22}$.

B. $\sqrt{19}$.

C. $2\sqrt{5}$.

D. $\sqrt{21}$.

Lời giải



Ta có: $|\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |-5\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BA} + 4\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BK}| = BK = 10\sqrt{21}$ với K là điểm sao cho tứ giác $ABDK$ là hình bình hành và D điểm sao cho $\overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{BC}$.

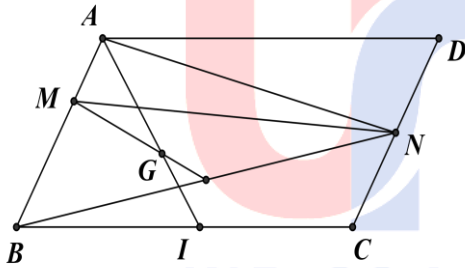
Gọi I là điểm sao cho $\overrightarrow{IA} + 5\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0}$, khi đó $|\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |10\overrightarrow{MI}| = 10MI$.

Từ đó: $|\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow 10MI = 10\sqrt{21} \Leftrightarrow MI = \sqrt{21}$.

Tức tập hợp các điểm M là một đường tròn tâm I bán kính bằng $\sqrt{21}$.

Câu 59: Cho hình bình hành $ABCD$ có các điểm M, I, N lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD sao cho $3AM = AB, BI = k.BC, 2CN = CD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BMN . Định k để ba điểm A, G, I thẳng hàng.

Lời giải



Do G là trọng tâm của tam giác BMN , nên có:

$$3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{5}{18}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

$$\text{Theo đề: } BI = kBC \Rightarrow \overrightarrow{BI} = k\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AB} = k(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = (1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}.$$

$$\text{Ba điểm } A, G, I \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = m\overrightarrow{AG} \quad (m \in \mathbb{R}; m \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow (1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC} = m\left(\frac{5}{18}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) \Leftrightarrow (1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC} = \frac{5m}{18}\overrightarrow{AB} + \frac{m}{3}\overrightarrow{AC}$$

Vậy: $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OD}$

Ta có:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH} - 2\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OH} - (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}. \text{ Từ đó suy ra } O, G, H \text{ thẳng hàng.}$$

Câu 62: Cho tam giác ABC có O, G, H thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm, trực tâm của tam giác. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}.$

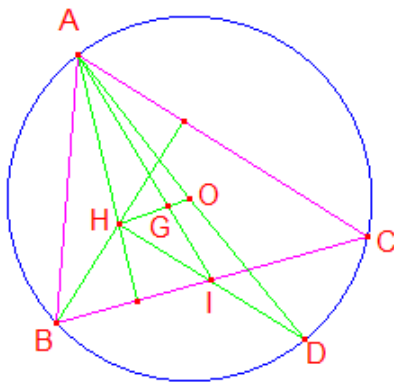
B. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}.$

C. Ba điểm O, G, H không thẳng hàng.

D. Ba điểm O, G, H thẳng hàng.

Lời giải

Chọn C



+ Kéo dài AO cắt (O) tại D . Suy ra AD là đường kính, tứ giác $HBDC$ là hình bình hành.

+ Gọi I là trung điểm $BC \Rightarrow I$ là trung điểm HD .

*Ta có:

$$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} = 2\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{AO} = 2(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AO}) = 2\overrightarrow{HO}$$

$\Rightarrow A$ đúng.

$$* \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA}) + (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB}) + (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HC}) = 3\overrightarrow{OH} + (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC})$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{OH} + 2\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{OH}$$

$\Rightarrow B$ đúng.

* Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$

$$\text{Mà } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH} \text{ (cmt)}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$$

$\Rightarrow$ Ba điểm O, G, H thẳng hàng.

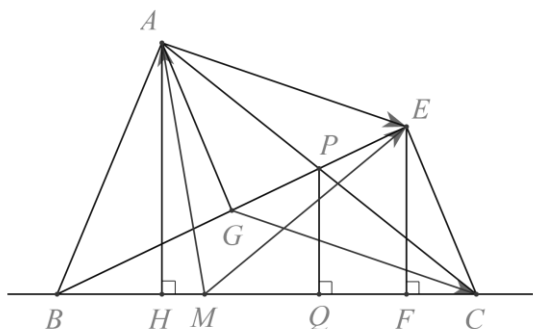
A. $b = 8a$

B. $a = 8b$.

C. $q = 6b$.

D. $b = 6a$.

Lời giải



Gọi F là hình chiếu của E lên BC , suy ra E, F cố định. Ta có $ME \geq EF$, dấu bằng xảy ra khi $M \equiv F$. Vậy $\min(|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GC}|) = EF \Leftrightarrow M \equiv F$.

Khi $M \equiv F$: Gọi P là trung điểm của AC , Q là hình chiếu của P lên BC .

Ta có Q là trung điểm của CH ; $\frac{BQ}{BF} = \frac{BP}{BE} = \frac{3}{4} \Rightarrow \overrightarrow{BF} = \frac{4}{3} \overrightarrow{BQ}$.

Có $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \Rightarrow BH = HQ = QC$, suy ra $\overrightarrow{BF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BQ} = \frac{8}{9}\overrightarrow{BC}$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{BF} = \frac{8}{9}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB} = \frac{8}{9}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{8}{9}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{9}\overrightarrow{AB}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AM} = \frac{8}{9}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{9}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{8}{9} \\ b = \frac{1}{9} \end{cases} \Rightarrow a = 8b.$$

Câu 64: Cho tam giác ABC có $BC = 3a$. Gọi M là điểm thỏa mãn $|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$. Độ dài nhỏ nhất của vector $\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA}$ bằng

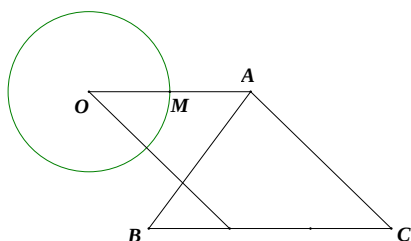
A. *a.*

B. 3a .

C. $\sqrt{3}a$.

D. $2a$.

Lời giải



Gọi O là điểm thỏa mãn: $3\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

$$\text{Khi đó: } 3\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{CB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$$

Ta xác định được điểm O có định thỏa $\overrightarrow{OA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$, suy ra: $OA = \frac{2}{3}CB$

$$\text{Mặt khác: } |3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$$

$$\Leftrightarrow |3\overrightarrow{MO} + 3\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{CB}| \Leftrightarrow |3\overrightarrow{MO}| = |\overrightarrow{CB}|$$

Suy ra: $MO = \frac{1}{3}CB$.

Do đó tập hợp các điểm M thỏa đề bài là đường tròn tâm O , bán kính bằng $\frac{1}{3}CB$.

Khi đó: $|\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{AM}| = AM$ nhỏ nhất khi O, M, A thẳng hàng và M nằm giữa O, A .

Vậy $AM = OA - MO = \frac{1}{3}CB$.

