

IV

VECTƠ

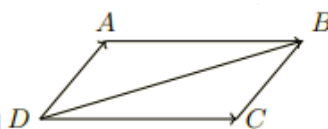
1. Chứng minh đẳng thức véc-tơ

a) Quy tắc ba điểm: Chèn C vào véc-tơ $\overrightarrow{AB}$

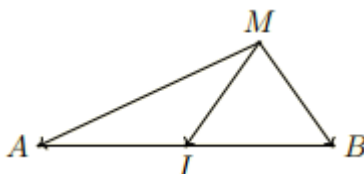
Cộng: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}$.

Trừ: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$.

b) Quy tắc hình bình hành: Cho hình bình hành $ABCD$: $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$.



c) Tính chất trung điểm Nếu I là trung điểm của AB và M là điểm bất kỳ: $2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$



d) Tính chất trọng tâm: G là trọng tâm của tam giác ABC và M là điểm bất kỳ.

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}.$$

2. Chứng minh ba điểm thẳng hàng, hai đường thẳng song song.

Dựa vào các kết luận sau:

* Ba điểm A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$.

* $AB \parallel CD \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC} \\ AB \neq CD \end{cases}$.

Câu 65: Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC} = -2\overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{PB} = -4\overrightarrow{PA}$. Chứng minh các điểm M, N, P thẳng hàng.

Câu 66: Cho tam giác ABC , gọi I là điểm trên BC kéo dài sao cho $IB = 3IC$. Gọi J, K lần lượt là những điểm trên cạnh AC, AB sao cho $JA = 2JC$; $KB = 3KA$. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{BC} = -10\overrightarrow{AI} - 24\overrightarrow{JK}$.

- Câu 67:** Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của AB, CD, EF . Chứng minh $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$ đúng với mọi điểm M .
- Câu 68:** Cho tam giác ABC . Gọi D, E, K lần lượt thỏa $3\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AE}$, $3\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AD}$. Chứng minh B, K, E thẳng hàng.
- Câu 69:** Cho tam giác ABC có $\overrightarrow{BM} = -2\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{NH} = \vec{0}$, $2\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{HD} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{8}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.
- Câu 70:** Cho tam giác ABC có $3\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{MB}$, $3\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{AH} = \vec{0}$, $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{PM} = \vec{0}$. Chứng minh 3 điểm Q, H, P thẳng hàng.
- Câu 71:** Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . Chứng minh rằng với điểm O bất kì ta luôn có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$
- Câu 72:** Cho tam giác ABC . Lần lượt lấy các điểm M, N, P trên các đoạn thẳng AB, BC và CA sao cho $AM = \frac{1}{3}AB, BN = \frac{1}{3}BC, CP = \frac{1}{3}CA$. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$.
- Câu 73:** Cho hình bình hành $ABCD$, gọi G là trọng tâm của tam giác ABD , gọi I là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$, gọi J là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0}$. Chứng minh rằng I, J, G thẳng hàng.
- a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{GJ} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.
- b) Chứng minh rằng ba điểm I, J, G thẳng hàng.
- Câu 74:** Cho tam giác ABC . Gọi M, N là các điểm lần lượt thuộc cạnh AB, AC sao cho $AM = \frac{3}{4}AB$, $AN = \frac{5}{8}AC$ và P là trung điểm của BC . Gọi K là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{KN} + \overrightarrow{KM} = \vec{0}$.
- a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AM} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AN}$.
- b) Chứng minh rằng ba điểm A, K, P thẳng hàng.
- Câu 75:** Cho hình thang $ABCD$ có đáy AB, CD , $CD = 2AB$. M, N lần lượt là các điểm thuộc cạnh AD và BC sao cho $AM = 5MD, 3BN = 2NC$. Gọi P là giao điểm của AC và MN , Q là giao điểm của BD và MN . Tính $\frac{PM}{PN} + \frac{QN}{QM}$.
- Câu 76:** Cho tứ giác $ABCD$, O là giao điểm hai đường chéo. Gọi G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm tam giác OBA, OAD, ODC, OCB . Gọi I là giao điểm của hai cạnh G_1G_3 và G_2G_4 . Lấy điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Chứng minh O, I, G thẳng hàng.
- Câu 77:** Cho hình bình hành $ABCD$, có $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$ và G là trọng tâm tam giác ABD , N là điểm thuộc đoạn thẳng BC . Xác định vị trí của N sao cho 3 điểm M, G, N thẳng hàng.

Câu 78: Cho tam giác ABC và các điểm P, Q thỏa mãn $\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{PB}$, $3\overrightarrow{QA} + 2\overrightarrow{QC} = \vec{0}$. Chứng minh rằng đường thẳng PQ đi qua trọng tâm tam giác ABC .

Câu 79: Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi M, N là 2 điểm lần lượt thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{NB}$; $2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh rằng M, N, G thẳng hàng.

Câu 80: Cho ABC đều có cạnh bằng 2023. Gọi Δ là đường thẳng qua A và song song BC , điểm M di động trên Δ . Tìm giá trị nhỏ nhất của $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$.

Câu 81: Cho hình bình hành $ABCD$, gọi E là trung điểm AD , $AB = a$, $BC = 2a$, $AC = a\sqrt{3}$. Tính độ dài vector $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC}$.

Câu 82: Cho tam giác đều ABC cạnh a nội tiếp đường tròn (O) . Điểm M thuộc (O) . Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$.

Câu 83: Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Gọi H là chân đường cao hạ từ A sao cho $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HC}$.

Điểm M di động trên BC sao cho $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BC}$. Tìm x sao cho độ dài vector $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 84: Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a , điểm M thỏa mãn $2|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 3|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|\overrightarrow{AM}|$.

PHÂN TÍCH MỘT VECTOR THEO 2 VECTOR KHÔNG CÙNG PHƯƠNG.

Để phân tích một vector theo 2 vector không cùng phương, ta sử dụng linh hoạt quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành, tích vector với một số, tính chất trung điểm, trọng tâm tam giác.

♦ Quy tắc ba điểm: Cho ba điểm A, B, C , khi đó $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

♦ Quy tắc hình bình hành: Cho hình bình hành $ABCD$, khi đó $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

♦ Tích vector với một số: Cho số thực k và vector $\vec{a}$. Khi đó tích $k\vec{a}$ là một vector, cùng hướng với vector $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với vector $\vec{a}$ nếu $k < 0$ và có độ dài $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$.

♦ Tính chất trung điểm

♦ Điểm M thuộc đoạn AB sao cho $xAM = yBM$ ($x, y > 0$) thì $\overrightarrow{AM} = \frac{y}{x+y}\overrightarrow{AB}$ và khi đó với

mọi điểm I ta có $\overrightarrow{IM} = \frac{x\overrightarrow{IA} + y\overrightarrow{IB}}{x+y}$.

Câu 85: Cho tam giác ABC . Gọi N là điểm nằm trên cạnh AC sao cho $NA=3NC$, M là điểm nằm trên đoạn BN sao cho $BN=3BM$. Phân tích $\overrightarrow{AM}$ theo $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ và $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Câu 86: Cho tam giác ABC . Gọi E, F lần lượt là hai điểm trên hai cạnh BA, BC sao cho $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BF} = \frac{4}{5}\overrightarrow{BC}$. Gọi I, J lần lượt là hai điểm trên hai đoạn EF, AC sao cho $IE = 2IF, 2JC = JA$

. Hãy phân tích vector $\overrightarrow{IJ}$ theo hai vector $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$.

Câu 87: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I là trung điểm của CD , G là trọng tâm tam giác BCI . Hãy phân tích $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

Câu 88: Cho tam giác ABC , gọi I là điểm trên BC kéo dài sao cho $IB = 3IC$. Gọi J, K lần lượt là những điểm trên cạnh AC, AB sao cho $JA = 2JC, KB = 3KA$. Khi đó $\overrightarrow{BC} = m\overrightarrow{AI} + n\overrightarrow{JK}$. Tính tổng $P = m + n$.

Câu 89: Cho tam giác ABC . Điểm M thuộc đoạn thẳng BC sao cho $MB = 2MC$. Hãy phân tích vector $\overrightarrow{CM}$ theo hai vector $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Câu 90: Cho tứ giác $ABCD$, O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Gọi G, G' theo thứ tự là trọng tâm của tam giác OAB và OCD . Phân tích $\overrightarrow{GG'}$ theo hai vector $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$.

Câu 91: Cho hình bình hành $ABCD$, trên các cạnh AB, CD lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho $12AM = AB, 2NC = CD$. Gọi G là trọng tâm tam giác BMN . Hãy phân tích vector $\overrightarrow{AG}$ theo 2 vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

Câu 92: Cho tứ giác $ABCD$ trên các cạnh AB, CD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$ và $3\overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{DC}$. Hãy biểu diễn vector $\overrightarrow{MN}$ theo hai vector $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$.

Câu 93: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là hai điểm nằm trên hai cạnh AB và CD sao cho $AB = 3AM, CD = 2CN$. Hãy phân tích vector $\overrightarrow{AG}$ qua các vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Câu 94: Cho tam giác ABC . Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Ta dựng các điểm M, N thỏa mãn: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN} = -2\overrightarrow{CB}$. Hãy phân tích $\overrightarrow{MN}$ qua các vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

Câu 95: Cho tam giác ABC , trên cạnh BC lấy M sao cho $\overrightarrow{BM} = -3\overrightarrow{CM}$, trên đoạn AM lấy N sao cho $\overrightarrow{AN} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AM}$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Hãy phân tích vector $\overrightarrow{MN}$ qua các vector $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{GB}$.

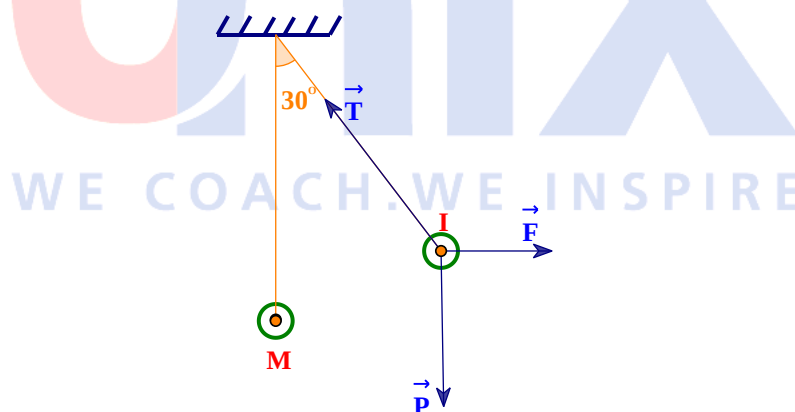
Câu 96: Cho AD và BE là hai phân giác trong của tam giác ABC $D \in BC$, $E \in AC$. Biết rằng $AB = 4$, $BC = 5$ và $CA = 6$. Hãy phân tích vector $\overrightarrow{DE}$ theo các vector $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$.

Câu 97: Cho tam giác ABC . M là điểm trên cạnh AB sao cho $AM = 3MB$, N điểm đối xứng của M qua B . Giả sử $\overrightarrow{CN} = m\overrightarrow{AC} + n\overrightarrow{BC}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + 8mx - 4n$.

Câu 98: Cho hình bình hành $ABCD$, lấy M trên cạnh AB và N trên cạnh CD sao cho $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$. Gọi I và J là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BI} = m\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AJ} = n\overrightarrow{AI}$. Khi J là trọng tâm tam giác BMN thì tích $m.n$ bằng bao nhiêu?

Câu 99: Cho hình chữ nhật $ABCD$. F là trung điểm của cạnh CD , E là điểm xác định bởi $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{EA}$.
Goi G là trọng tâm tam giác BEF . Phân tích vector $\overrightarrow{DG}$ theo hai vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$.

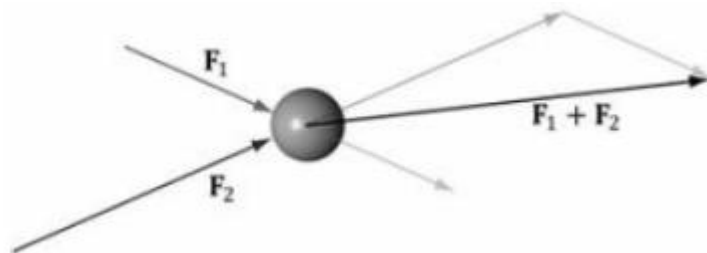
Câu 134: Một con lắc đơn đang đứng yên tại vị trí cân bằng M . Thực tập viên tác dụng một lực $\vec{F}$ lên con lắc đưa nó đến vị trí I và giữ yên như hình vẽ.



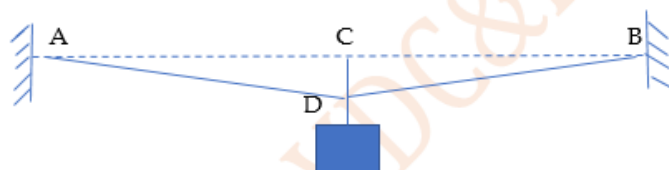
Biết rằng con lắc đang chịu tác động của lực căng dây $\vec{T}$ có cường độ $40N$, trọng lực $\vec{P}$ và lực tác dụng $\vec{F}$. Hãy xác định cường độ của lực $\vec{F}$?

The diagram illustrates a rectangular channel with a bottom width of 2m and a water depth of 1.5m. The flow direction is indicated by an arrow labeled "Chiều dòng chảy". The velocity profile at the bottom is parabolic, with a maximum velocity of 0.4 m/s at the center (point M) and zero velocity at the walls (points A and B). The velocity profile at the water surface is uniform, with a velocity of 0.2 m/s (points A' and B').

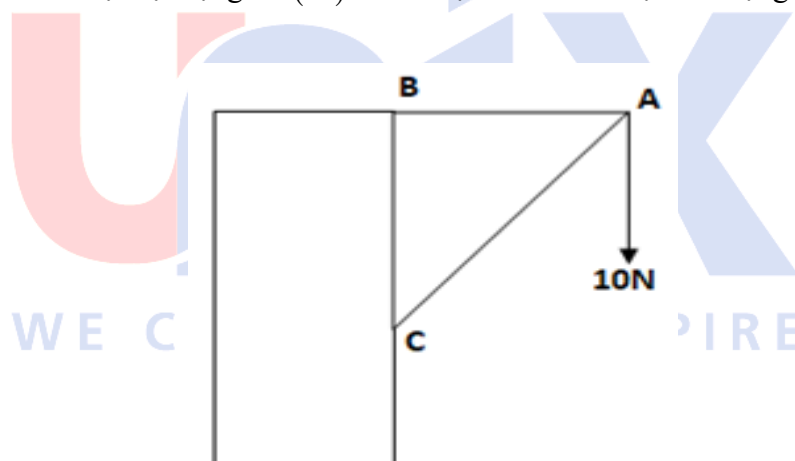
Câu 138: Hai lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ cùng tác động vào một vật tại điểm M lần lượt có cường độ $30N$ và $40N$ và góc tạo bởi hai lực là α . Tìm số đo góc α để cường độ lực tổng hợp của hai lực là lớn nhất, khi đó hãy tìm cường độ lực tổng hợp của hai lực đó.



Câu 139: Treo một vật vào điểm chính giữa của dây thép AB . Khối lượng của vật là $5kg$. Biết $AB = 4m$, $CD = 20cm$. Tính lực kéo mỗi nửa sợi dây.



Câu 140: Một giá đỡ hình tam được gắn vào tường như hình vẽ. Tam giác ABC vuông cân tại B . Người ta treo vào điểm A một vật nặng $10(N)$. Tính độ lớn của các lực tác động vào tường tại B và C .



Câu 141: Một người chèo thuyền muốn băng qua con kênh rộng 3 km và muốn ghé vào bờ tại vị trí cách điểm xuất phát 2 km về phía thượng nguồn. Vận tốc dòng nước là $3,5\text{ km/h}$ và vận tốc của thuyền là 13 km/h .

- Người ấy nên lái theo hướng nào?
- Chuyến đi sẽ kéo dài bao lâu?