

IV

VECTƠ

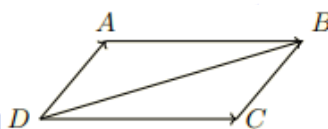
1. Chứng minh đẳng thức véc-tơ

a) Quy tắc ba điểm: Chèn C vào véc-tơ $\overrightarrow{AB}$

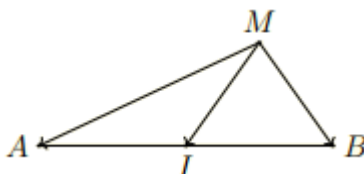
Cộng: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.

Trừ: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$.

b) Quy tắc hình bình hành: Cho hình bình hành $ABCD$: $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$.



c) Tính chất trung điểm Nếu I là trung điểm của AB và M là điểm bất kỳ: $2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$



d) Tính chất trọng tâm: G là trọng tâm của tam giác ABC và M là điểm bất kỳ.

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}.$$

2. Chứng minh ba điểm thẳng hàng, hai đường thẳng song song.

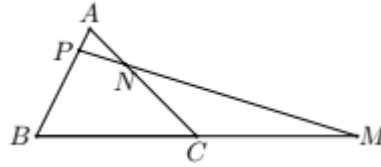
Dựa vào các kết luận sau:

* Ba điểm A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$.

* $AB \parallel CD \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC} \\ AB \neq CD \end{cases}$.

Câu 65: Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC} = -2\overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{PB} = -4\overrightarrow{PA}$. Chứng minh các điểm M, N, P thẳng hàng.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{MC}$.

$\overrightarrow{NC} = -2\overrightarrow{NA} \Leftrightarrow \overrightarrow{NC} - \overrightarrow{NA} = -3\overrightarrow{NA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{NA}$.

$\overrightarrow{PB} = -4\overrightarrow{PA} \Leftrightarrow \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA} = -5\overrightarrow{PA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = -5\overrightarrow{PA}$.

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$.

$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{CB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{CB} + \frac{4}{5}(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}) = \frac{6}{5}\overrightarrow{CB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{CA}$.

Để thấy $\overrightarrow{MP} = \frac{6}{5}\left(\overrightarrow{CB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}\right) = \frac{6}{5}\overrightarrow{MN}$ nên các điểm M, N, P thẳng hàng.

Câu 66: Cho tam giác ABC , gọi I là điểm trên BC kéo dài sao cho $IB = 3IC$. Gọi J, K lần lượt là những điểm trên cạnh AC, AB sao cho $JA = 2JC; KB = 3KA$. Chứng minh rằng:
 $\overrightarrow{BC} = -10\overrightarrow{AI} - 24\overrightarrow{JK}$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

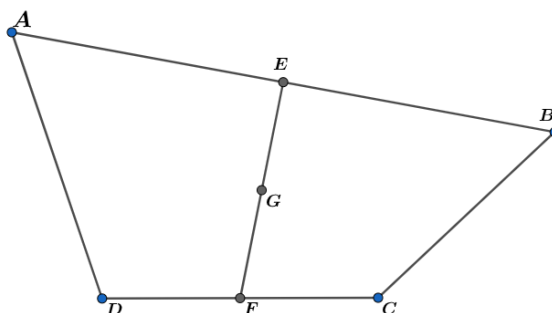
$\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Từ và ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} \overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{JK} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AC} = 6\overrightarrow{AI} + 12\overrightarrow{JK} \\ \overrightarrow{AB} = 16\overrightarrow{AI} + 36\overrightarrow{JK} \end{cases}$$

Ta có: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = -10\overrightarrow{AI} - 24\overrightarrow{JK}$.

Câu 67: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của AB, CD, EF . Chứng minh
 $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$ đúng với mọi điểm M .

Lời giải

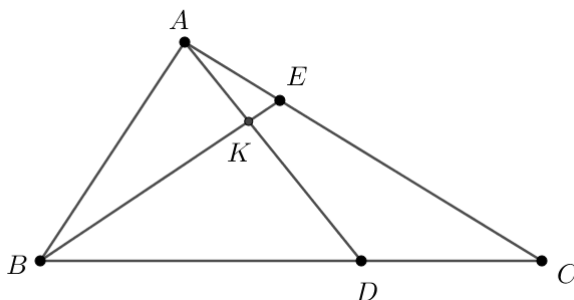


Suy ra, $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2(\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF}) = \vec{0}$.

Do đó $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} - 4\overrightarrow{MG} = \vec{0}$.

Vậy $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$.

Lời giải



$$\text{Vi } \overrightarrow{AE} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BC}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \overrightarrow{BE} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) \\ &= \overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA}\right) = \frac{3}{8}\overrightarrow{BD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BA}\end{aligned}$$

$$\text{Vì } \overrightarrow{AK} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AD} \text{ nên } \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3} (\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA}) = \frac{1}{3} \overrightarrow{BD} + \frac{2}{3} \overrightarrow{BA}.$$

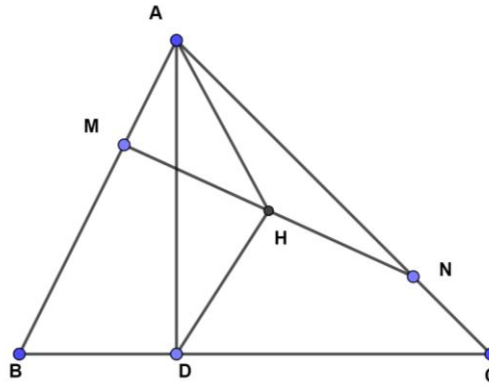
Do đó $\overrightarrow{BK} = \frac{8}{9} \overrightarrow{BE}$.

Vậy B, K, E thẳng hàng.

Câu 69: Cho tam giác ABC có $\overrightarrow{BM} = -2\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{NH} = \vec{0}$,

$2\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{HD} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{8}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

Lời giải



Ta có: $\overrightarrow{BM} = -2\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

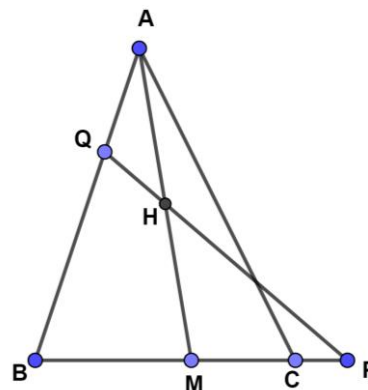
$\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{NC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

$2\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

Mặt khác: $\overrightarrow{HD} = -\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD} = \frac{-1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$
 $= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right) + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} - \frac{3}{8}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$
 $= \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{8}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \text{ (dpcm)}.$

Câu 70: Cho tam giác ABC có $3\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{MB}$, $3\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{AH} = \vec{0}$,
 $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{PM} = \vec{0}$. Chứng minh 3 điểm Q, H, P thẳng hàng.

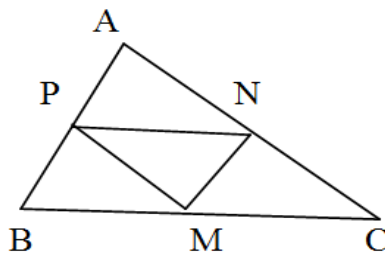
Lời giải



Ta có: $\overrightarrow{QH} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AH} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM})$
 $= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}\right) = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{10}(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = -\frac{2}{15}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{10}\overrightarrow{AC}$
 $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{6}{5}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{6}{5}(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = -\frac{8}{15}\overrightarrow{AB} + \frac{6}{5}\overrightarrow{AC} = 4\left(-\frac{2}{15}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{10}\overrightarrow{AC}\right)$
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{QP} = 4\overrightarrow{QH}$. Vậy suy ra 3 điểm Q, H, P thẳng hàng

Câu 71: Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . Chứng minh rằng với điểm O bất kì ta luôn có $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OM} + \vec{ON} + \vec{OP}$

Lời giải



Ta có:

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OM} + \vec{ON} + \vec{OP} \Leftrightarrow (\vec{OA} - \vec{OM}) + (\vec{OB} - \vec{ON}) + (\vec{OC} - \vec{OP}) = \vec{0}.$$

$$\vec{MA} + \vec{NB} + \vec{PC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AM} + \vec{BN} + \vec{CP} = \vec{0}.$$

Mặt khác
$$\begin{cases} \vec{AM} = \vec{AC} + \vec{CM} \\ \vec{BN} = \vec{BA} + \vec{AN} \\ \vec{CP} = \vec{CB} + \vec{BP} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{AM} + \vec{BN} + \vec{CP} = (\vec{AC} + \vec{CB} + \vec{BA}) + (\vec{CM} + \vec{BP} + \vec{AN}) = \vec{CM} + \vec{BP} + \vec{AN}.$$

Lại có
$$\begin{cases} \vec{BP} = \vec{MN} \\ \vec{AN} = \vec{NC} \end{cases}$$

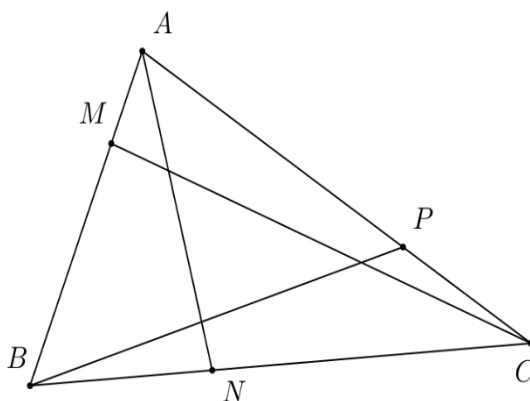
$$\Rightarrow \vec{AM} + \vec{BN} + \vec{CP} = \vec{CM} + \vec{MN} + \vec{NC} = \vec{0}.$$

Do đó ta có điều phải chứng minh.

Câu 72: Cho tam giác ABC . Lần lượt lấy các điểm M, N, P trên các đoạn thẳng AB, BC và CA sao cho

$$AM = \frac{1}{3}AB, BN = \frac{1}{3}BC, CP = \frac{1}{3}CA. \text{ Chứng minh rằng: } \vec{AN} + \vec{BP} + \vec{CM} = \vec{0}.$$

Lời giải



$$\text{Ta có, } \overrightarrow{BN} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{CP} = \frac{1}{3} \overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3} \overrightarrow{CA} \quad (2)$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) ta suy ra: } \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \frac{4}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \frac{4}{3} \vec{0} = \vec{0}.$$

Câu 73: Cho hình bình hành $ABCD$, gọi G là trọng tâm của tam giác ABD , gọi I là điểm thoả mãn $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$, gọi J là điểm thoả mãn $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0}$. Chứng minh rằng I, J, G thẳng hàng.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{GJ} = \frac{1}{6} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3} \overrightarrow{AD}$.

b) Chứng minh rằng ba điểm I, J, G thẳng hàng.

Lời giải

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{GJ} = \frac{1}{6} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3} \overrightarrow{AD}$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{JB} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} = \vec{0}.$$

$$\text{Suy ra } J \text{ là trung điểm của } AB \Rightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}.$$

$$\text{Vì } G \text{ là trọng tâm của tam giác } ABD \text{ nên } \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AD}.$$

$$\begin{aligned} \text{Lại có } 2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0} &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} \\ &\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}. \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}.$$

$$\overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3} \overrightarrow{AD} = \frac{1}{6} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3} \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{GJ} = \frac{1}{6} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3} \overrightarrow{AD}.$$

b) Chứng minh rằng ba điểm I, J, G thẳng hàng.

Theo câu a ta có:

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} \Rightarrow 4\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{GJ} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \Rightarrow 6\overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $4\overrightarrow{IJ} = 6\overrightarrow{GJ} \Rightarrow \overrightarrow{IJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{GJ} \Rightarrow \overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{GJ}$ cùng phương suy ra I, J, G thẳng hàng.

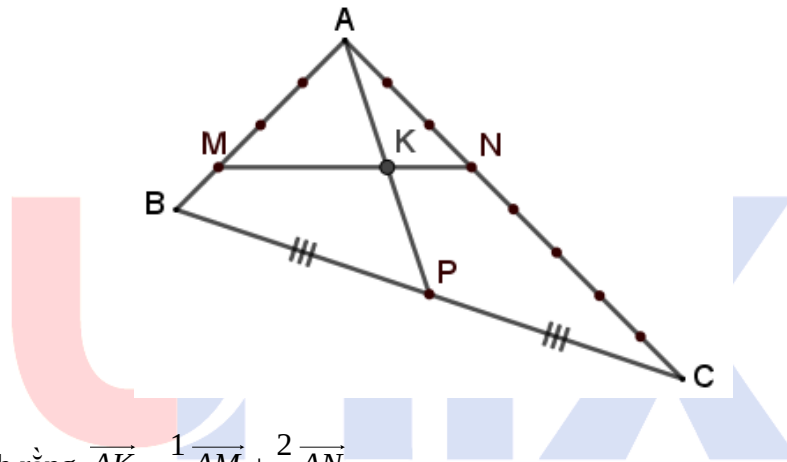
Câu 74: Cho tam giác ABC . Gọi M, N là các điểm lần lượt thuộc cạnh AB, AC sao cho $AM = \frac{3}{4}AB$,

$AN = \frac{5}{8}AC$ và P là trung điểm của BC . Gọi K là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{KN} + \overrightarrow{KM} = \vec{0}$.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AM} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AN}$.

b) Chứng minh rằng ba điểm A, K, P thẳng hàng.

Lời giải



a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AM} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AN}$

Ta có $2\overrightarrow{KN} + \overrightarrow{KM} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AN} - 2\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AK} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AM} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AN}.$$

b) Chứng minh rằng ba điểm A, K, P thẳng hàng.

Theo câu a) ta có $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AM} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AN}$,

$$\text{suy ra } \overrightarrow{AK} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}. \quad (1)$$

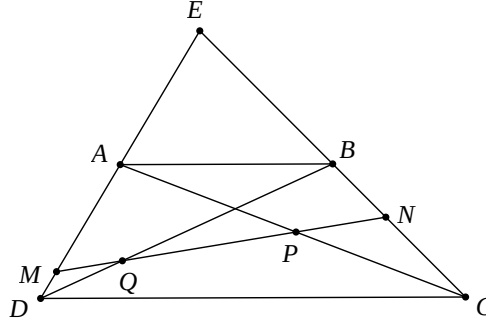
Vì P là trung điểm của BC nên $2\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}. \quad (2)$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } 4\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AP} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AP}.$$

Suy ra $\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AP}$ cùng phương $\Rightarrow A, K, P$ thẳng hàng.

Câu 75: Cho hình thang $ABCD$ có đáy $AB, CD, CD = 2AB$. M, N lần lượt là các điểm thuộc cạnh AD và BC sao cho $AM = 5MD, 3BN = 2NC$. Gọi P là giao điểm của AC và MN , Q là giao điểm của BD và MN . Tính $\frac{PM}{PN} + \frac{QN}{QM}$.

Lời giải



Gọi E là giao điểm của AD và BC . Ta có A, B lần lượt là trung điểm của EC, ED .

Giả sử $\overrightarrow{PM} = x\overrightarrow{PN}$; $\overrightarrow{QN} = y\overrightarrow{QM}$.

Ta có $\overrightarrow{EP} = \frac{\overrightarrow{EM} - x\overrightarrow{EN}}{1-x}$.

Ta có: $AM = 5MD \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{EM} = \frac{11}{6}\overrightarrow{EA}$.

$3BN = 2NC \Rightarrow \overrightarrow{BN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{EN} = \frac{7}{10}\overrightarrow{EC}$.

Do đó: $\overrightarrow{EP} = \frac{\overrightarrow{EM} - x\overrightarrow{EN}}{1-x} = \frac{\frac{11}{6}\overrightarrow{EA} - \frac{7x}{10}\overrightarrow{EC}}{1-x} = \frac{11}{6(1-x)}\overrightarrow{EA} - \frac{7x}{10(1-x)}\overrightarrow{EC}$.

Do P, A, C thẳng hàng nên $\frac{11}{6(1-x)} - \frac{7x}{10(1-x)} = 1 \Leftrightarrow 55 - 21x = 30 - 30x \Leftrightarrow x = -\frac{25}{9}$.

Vậy $\frac{PM}{PN} = \frac{25}{9}$.

Ta có $\overrightarrow{EQ} = \frac{\overrightarrow{EN} - y\overrightarrow{EM}}{1-y}$, $\overrightarrow{EN} = \frac{7}{10}\overrightarrow{EC} = \frac{7}{5}\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{EM} = \frac{11}{6}\overrightarrow{EA} = \frac{11}{12}\overrightarrow{ED}$,

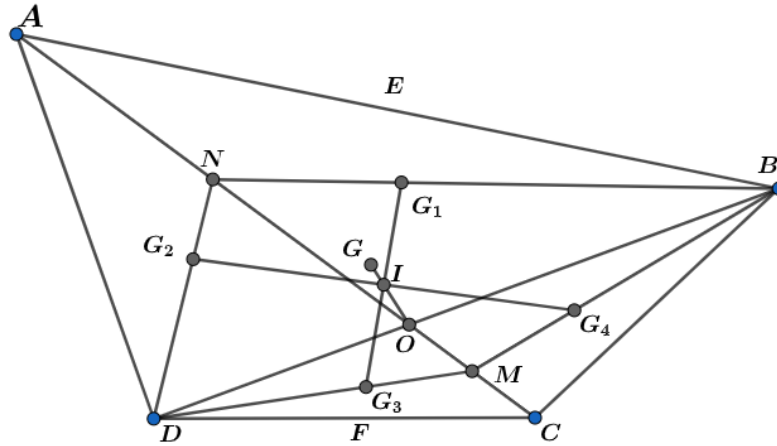
$\overrightarrow{EQ} = \frac{\overrightarrow{EN} - y\overrightarrow{EM}}{1-y} = \frac{\frac{7}{5}\overrightarrow{EB} - \frac{11y}{12}\overrightarrow{ED}}{1-y} = \frac{7}{5(1-y)}\overrightarrow{EB} - \frac{11y}{12(1-y)}\overrightarrow{ED}$.

Do Q, B, D thẳng hàng nên $\frac{7}{5(1-y)} - \frac{11y}{12(1-y)} = 1 \Leftrightarrow 84 - 55y = 60 - 60y \Leftrightarrow y = -\frac{24}{5}$.

Vậy $\frac{QN}{QM} = \frac{24}{5}$. Suy ra $\frac{PM}{PN} + \frac{QN}{QM} = \frac{341}{45}$.

Câu 76: Cho tứ giác $ABCD$, O là giao điểm hai đường chéo. Gọi G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm tam giác OBA, OAD, ODC, OCB . Gọi I là giao điểm của hai cạnh G_1G_3 và G_2G_4 . Lấy điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Chứng minh O, I, G thẳng hàng.

Lời giải



Theo định lí Talet, ta được $\overrightarrow{G_1G_2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{G_4G_3} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$.

Suy ra $G_1G_2G_3G_4$ là hình bình hành.

Do đó $\overrightarrow{IG_1} + \overrightarrow{IG_2} + \overrightarrow{IG_3} + \overrightarrow{IG_4} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{G_1G} + \overrightarrow{G_2G} + \overrightarrow{G_3G} + \overrightarrow{G_4G} = 4\overrightarrow{IG}$.

Vì $\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{G_1G}$ nên $\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{G_1G}$.

Tương tự $\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GD} = 3\overrightarrow{G_2G}$; $\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{GD} - \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{G_3G}$; $\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GB} = 3\overrightarrow{G_4G}$.

Suy ra $4\overrightarrow{OG} - 2(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) = 3(\overrightarrow{G_1G} + \overrightarrow{G_2G} + \overrightarrow{G_3G} + \overrightarrow{G_4G})$,

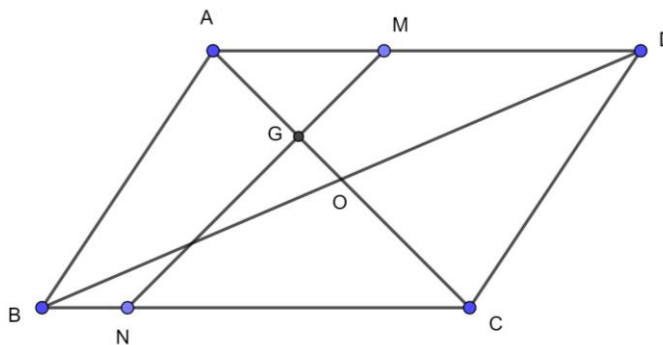
Mà: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$, $\overrightarrow{G_1G} + \overrightarrow{G_2G} + \overrightarrow{G_3G} + \overrightarrow{G_4G} = 4\overrightarrow{IG}$

ta được $\overrightarrow{OG} = 3\overrightarrow{IG}$.

Vậy O, I, G thẳng hàng.

Câu 77: Cho hình bình hành $ABCD$, có $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$ và G là trọng tâm tam giác ABD , N là điểm thuộc đoạn thẳng BC . Xác định vị trí của N sao cho 3 điểm M, G, N thẳng hàng.

Lời giải



Ta có: $\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AG} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{15}\overrightarrow{AD}$,

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC} = \left(k - \frac{2}{5}\right)\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}.$$

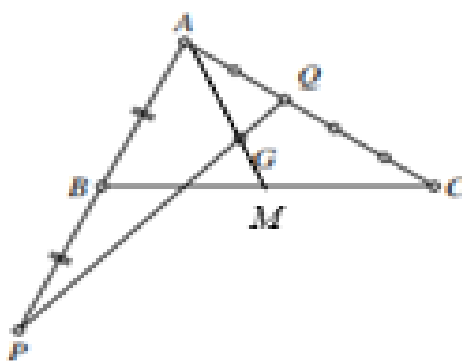
$$\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{MG} \Leftrightarrow \left(k - \frac{2}{5}\right)\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = x \cdot \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{15}\overrightarrow{AD}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{x}{3} - 1\right)\overrightarrow{AB} - \left(\frac{x}{15} + k - \frac{2}{5}\right)\overrightarrow{AD} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} - 1 = 0 \\ \frac{x}{15} + k - \frac{2}{5} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ k = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Vậy điểm N thuộc đoạn BC sao cho $BN = \frac{1}{5}BC$.

Câu 78: Cho tam giác ABC và các điểm P, Q thỏa mãn $\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{PB}$, $3\overrightarrow{QA} + 2\overrightarrow{QC} = \vec{0}$. Chứng minh rằng đường thẳng PQ đi qua trọng tâm tam giác ABC .

Lời giải



Từ giả thiết ta có $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AP}$ và $\overrightarrow{AC} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AQ}$.

Ta có:

$$\overrightarrow{GP} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AP} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + 2\overrightarrow{AB} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}, \quad (1)$$

$$\overrightarrow{GQ} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AQ} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AM} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{15}\overrightarrow{AC}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{GP} = -5\overrightarrow{GQ}$ hay 3 điểm P, G, Q thẳng hàng.

Vậy PQ đi qua trọng tâm G của tam giác ABC .

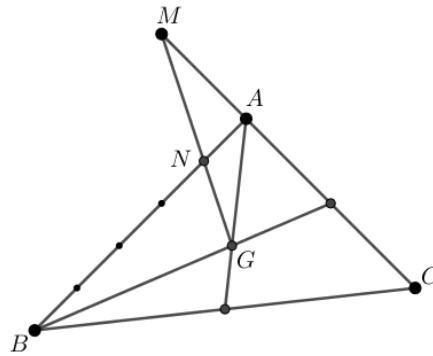
Câu 79: Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi M, N là 2 điểm lần lượt thỏa mãn đẳng thức

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{NB}; \quad 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}.$$

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh rằng M, N, G thẳng hàng.

Lời giải



a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$.

+Ta có: $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{NB} \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$; $2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Suy ra

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

+ Ta có $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, suy ra $\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh rằng M, N, G thẳng hàng.

Theo câu a ta có:

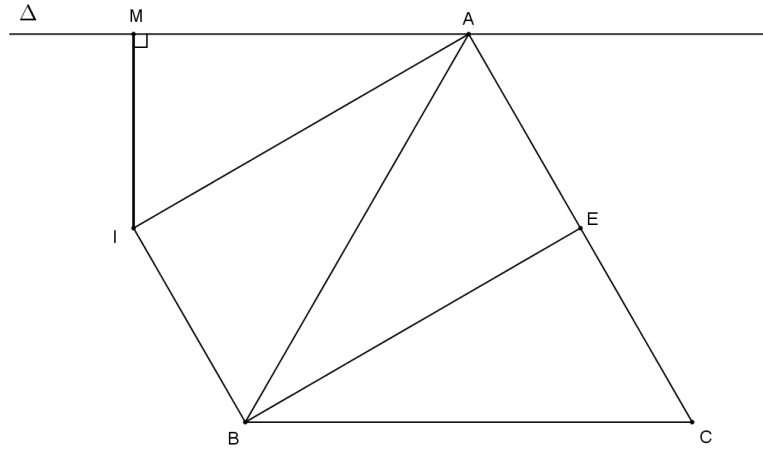
$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \Rightarrow 10\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC} \quad 1$$

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AC} \Rightarrow 6\overrightarrow{MG} = 2\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC} \quad 2$$

Từ 1 và 2 suy ra $10\overrightarrow{MN} = 6\overrightarrow{MG}$ hay $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{5}\overrightarrow{MG}$, suy ra $\overrightarrow{MN}$ & $\overrightarrow{MG}$ cùng phương hay M, N, G thẳng hàng.

Câu 80: Cho ABC đều có cạnh bằng 2023. Gọi Δ là đường thẳng qua A và song song BC , điểm M di động trên Δ . Tìm giá trị nhỏ nhất của $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$.

Lời giải



Gọi E là trung điểm AC .

Lấy điểm I sao cho: $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AE}$

$\Rightarrow I$ là điểm thứ tư của hình bình hành $AIBE$.

Ta có: $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| = |(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})|$

$= |2\overrightarrow{MI} + (\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC})| = |2\overrightarrow{MI}| = 2MI \geq 2d(I; \Delta).$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M là hình chiếu của I trên Δ .

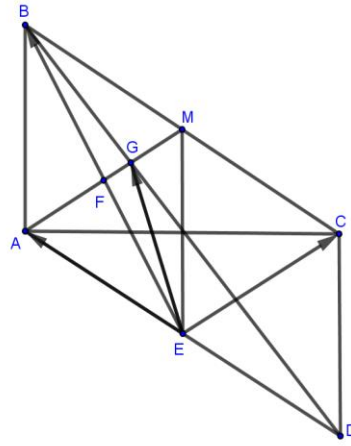
Khi đó: $MAI = MAB - IAB = 60^\circ - ABE = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$.

$\Rightarrow IM = IA \cdot \sin 30^\circ = BE \cdot \sin 30^\circ = \frac{2023\sqrt{3}}{2} \cdot \sin 30^\circ = \frac{2023\sqrt{3}}{4}.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ bằng $\frac{2023\sqrt{3}}{2}.$

Câu 81: Cho hình bình hành $ABCD$, gọi E là trung điểm AD , $AB = a$, $BC = 2a$, $AC = a\sqrt{3}$. Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC}$.

Lời giải



Ta có: $BC^2 = (2a)^2 = 4a^2 = a^2 + (a\sqrt{3})^2 = AB^2 + AC^2$. Suy ra $\triangle ABC$ vuông tại A .

Gọi M là trung điểm của BC , G là trọng tâm $\triangle ABC$, $F = AM \cap BE$.

Khi đó $|\vec{EA} + \vec{EB} + \vec{EC}| = |3\vec{EG}| = 3EG$.

Ta có:
$$\begin{cases} BM \parallel AE \text{ (} BC \parallel AD \text{)} \\ BM = AE \left(= \frac{BC}{2} = \frac{AD}{2} \right) \end{cases} \Rightarrow ABME \text{ là hình bình hành.}$$

Mặt khác $AB = BM = a$ nên $ABME$ là hình thoi. Suy ra $BE \perp AM$.

Ta có: $FG = FM - GM = \frac{AM}{2} - \frac{AM}{3} = \frac{AM}{6} = \frac{1}{2}BC \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \cdot 2a = \frac{a}{6}$

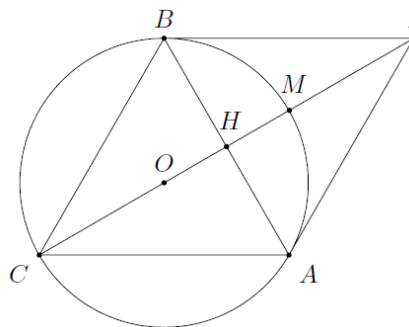
Tam giác AME có $AM = \frac{BC}{2} = a = ME = AE$ nên $\triangle AME$ đều. Suy ra $EF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Xét tam giác vuông EFG ta có: $EG = \sqrt{EF^2 + FG^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{6}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{3}$.

Vậy $|\vec{EA} + \vec{EB} + \vec{EC}| = |3\vec{EG}| = 3EG = 3 \cdot \frac{a\sqrt{7}}{3} = a\sqrt{7}$.

Câu 82: Cho tam giác đều ABC cạnh a nội tiếp đường tròn (O) . Điểm M thuộc (O) . Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $|\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC}|$.

Lời giải



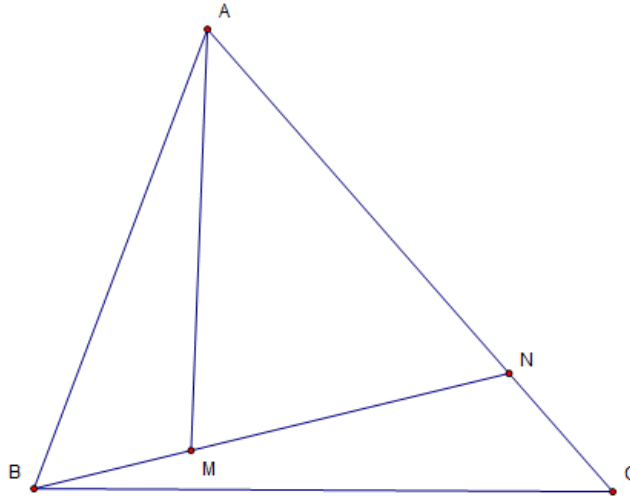
Gọi I là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ACBI$.

Ta có $\vec{IA} + \vec{IB} - \vec{IC} = \vec{0}$.

56 | **Ths. Lê Việt – THPT Thăng Long, Hà Nội – Phone: 0835221183 - Ôn thi cam kết điểm số**

Câu 85: Cho tam giác ABC . Gọi N là điểm nằm trên cạnh AC sao cho $NA=3NC$, M là điểm nằm trên đoạn BN sao cho $BN=3BM$. Phân tích $\overrightarrow{AM}$ theo $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ và $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Lời giải



Ta có N là điểm nằm trên cạnh AC sao cho $NA=3NC \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AC}$.

M là điểm nằm trên đoạn BN sao cho $BN=3BM \Rightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BN}$.

Do đó $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AN} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AC} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$.

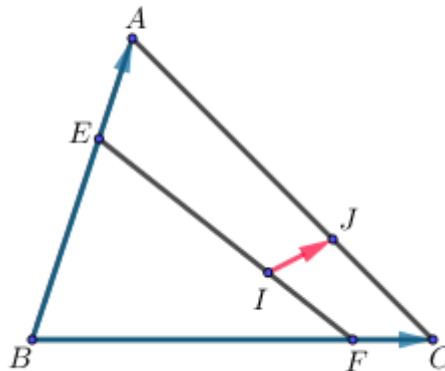
Vậy $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \vec{u} + \frac{1}{4} \vec{v}$.

Câu 86: Cho tam giác ABC . Gọi E, F lần lượt là hai điểm trên hai cạnh BA, BC sao cho $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BA}$,

$\overrightarrow{BF} = \frac{4}{5} \overrightarrow{BC}$. Gọi I, J lần lượt là hai điểm trên hai đoạn EF, AC sao cho $IE = 2IF, 2JC = JA$

. Hãy phân tích vector $\overrightarrow{IJ}$ theo hai vector $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$.

Lời giải



Ta có:

$$\begin{cases} IE = 2IF \\ I \in EF \end{cases} \Rightarrow \vec{IE} = -2\vec{IF} \Rightarrow \vec{BI} = \frac{\vec{BE} + 2\vec{BF}}{1+2} = \frac{1}{3}\vec{BE} + \frac{2}{3}\vec{BF} = \frac{2}{9}\vec{BA} + \frac{8}{15}\vec{BC}$$

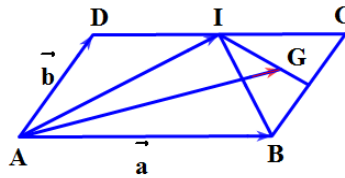
$$\begin{cases} JA = 2JC \\ J \in AC \end{cases} \Rightarrow \vec{JA} = -2\vec{JC} \Rightarrow \vec{BJ} = \frac{\vec{BA} + 2\vec{BC}}{1+2} = \frac{1}{3}\vec{BA} + \frac{2}{3}\vec{BC}$$

$$\vec{IJ} = \vec{BJ} - \vec{BI} = \left(\frac{1}{3}\vec{BA} + \frac{2}{3}\vec{BC}\right) - \left(\frac{2}{9}\vec{BA} + \frac{8}{15}\vec{BC}\right) = \frac{1}{9}\vec{BA} + \frac{2}{15}\vec{BC}$$

$$\text{Vậy } \vec{IJ} = \frac{1}{9}\vec{BA} + \frac{2}{15}\vec{BC}.$$

Câu 87: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I là trung điểm của CD , G là trọng tâm tam giác BCI . Hãy phân tích $\vec{AG}$ theo $\vec{AB}$ và $\vec{AD}$.

Lời giải



$$* I \text{ là trung điểm của } CD \text{ nên: } \vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AD} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AD}.$$

$$* G \text{ là trọng tâm tam giác } BCI, \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD} \text{ và } \vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AD} \text{ nên}$$

$$\vec{AG} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} + \frac{1}{3}\vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AD}) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AD}\right) = \frac{5}{6}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AD}$$

Câu 88: Cho tam giác ABC , gọi I là điểm trên BC kéo dài sao cho $IB = 3IC$. Gọi J, K lần lượt là những điểm trên cạnh AC, AB sao cho $JA = 2JC, KB = 3KA$. Khi đó $\vec{BC} = m\vec{AI} + n\vec{JK}$. Tính tổng $P = m + n$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \vec{AI} = \vec{AB} + \vec{BI} = \vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{BC} = \vec{AB} + \frac{3}{2}(\vec{AC} - \vec{AB}) = \frac{3}{2}\vec{AC} - \frac{1}{2}\vec{AB} \quad (1)$$

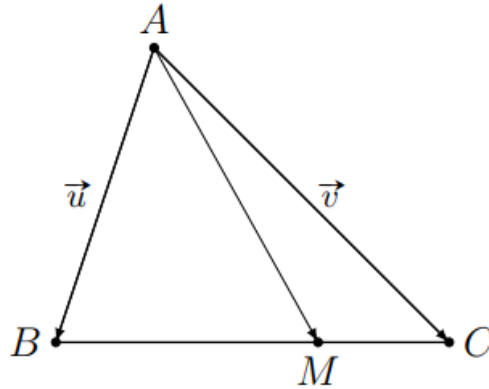
$$\vec{JK} = \vec{AK} - \vec{AJ} = \frac{1}{4}\vec{AB} - \frac{2}{3}\vec{AC} \quad (2)$$

$$\text{Từ và ta có hệ phương trình } \begin{cases} \vec{AI} = \frac{3}{2}\vec{AC} - \frac{1}{2}\vec{AB} \\ \vec{JK} = \frac{1}{4}\vec{AB} - \frac{2}{3}\vec{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{AB} = 16\vec{AI} + 36\vec{JK} \\ \vec{AC} = 6\vec{AI} + 12\vec{JK} \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB} = -10\vec{AI} - 24\vec{JK} \Rightarrow m = -10, n = -24 \Rightarrow P = m + n = -34.$$

Câu 89: Cho tam giác ABC . Điểm M thuộc đoạn thẳng BC sao cho $MB = 2MC$. Hãy phân tích vectơ $\vec{CM}$ theo hai vectơ $\vec{u} = \vec{AB}, \vec{v} = \vec{AC}$.

Lời giải

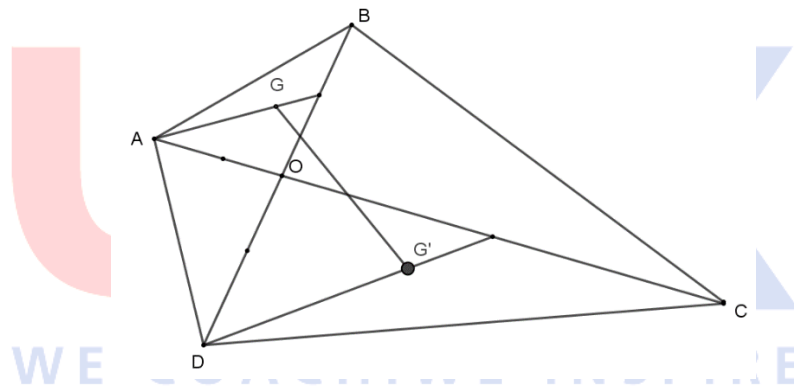


♦ Theo giả thiết M thuộc đoạn thẳng BC và $MB = 2MC$. Do đó $\overrightarrow{CM} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

♦ Mà $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ nên $\overrightarrow{CM} = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \frac{1}{3}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v}$.

Câu 90: Cho tứ giác $ABCD$, O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Gọi G, G' theo thứ tự là trọng tâm của tam giác OAB và OCD . Phân tích $\overrightarrow{GG'}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$.

Lời giải



♦ Vì G' là trọng tâm của tam giác OCD nên ta có: $\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD})$ (1).

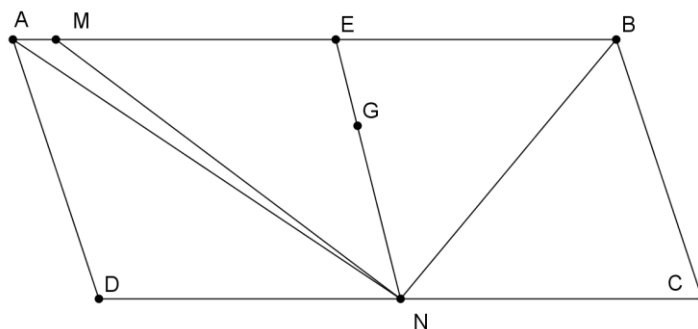
♦ Vì G là trọng tâm của tam giác OAB nên ta có: $\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GO} = -(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB})$ (2)

♦ Từ (1) và (2) $\Rightarrow \overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} - \overrightarrow{GB}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

Vậy $\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

Câu 91: Cho hình bình hành $ABCD$, trên các cạnh AB, CD lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho $12AM = AB, 2NC = CD$. Gọi G là trọng tâm tam giác BMN . Hãy phân tích vectơ $\overrightarrow{AG}$ theo 2 vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

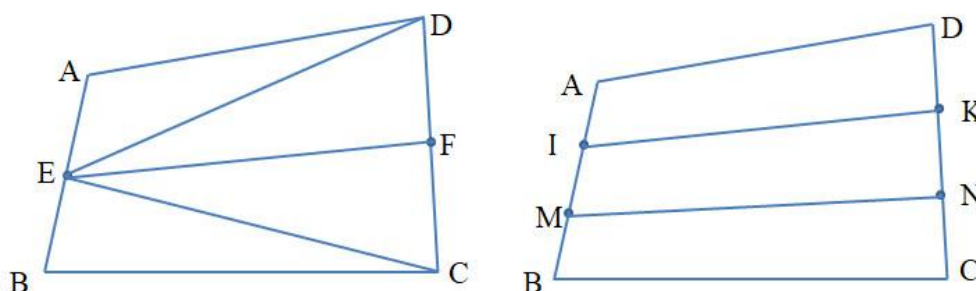
Lời giải



- Suy ra $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3} \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{12} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \right) = \frac{19}{36} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AD}$.

Câu 92: Cho tứ giác $ABCD$ trên các cạnh AB, CD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $\overrightarrow{3AM} = 2\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{3DN} = 2\overrightarrow{DC}$. Hãy biểu diễn vector $\overrightarrow{MN}$ theo hai vector $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$.

Lời giải



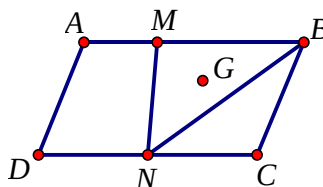
- Thật vậy, ta có $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{EP} + \overrightarrow{EQ}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{EN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{MQ}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{NP})$.

- Khi đó, áp dụng kết quả bài toán trên ta có:

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{IK}) = \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MN})\right] \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}.$$

Câu 93: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là hai điểm nằm trên hai cạnh AB và CD sao cho $AB = 3AM$, $CD = 2CN$. Hãy phân tích vector $\overrightarrow{AG}$ qua các vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải



$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}.$$

Vì G là trọng tâm tam giác MNB nên:

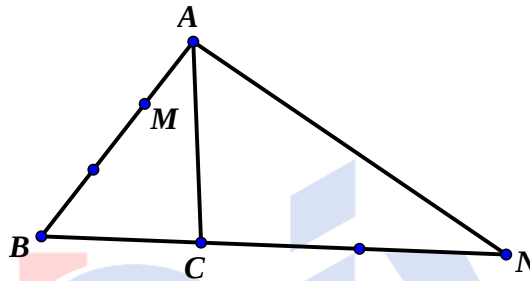
$$3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \right) + \overrightarrow{AB} = \frac{5}{6} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AG} = \frac{5}{18} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}.$$

Câu 94: Cho tam giác ABC . Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Ta dựng các điểm M, N thỏa mãn:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CN} = -2\overrightarrow{CB}. \text{ Hãy phân tích } \overrightarrow{MN} \text{ qua các vector } \vec{u} \text{ và } \vec{v}.$$

Lời giải



Vì $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$ suy ra M thuộc cạnh AB và $AM = \frac{1}{3} AB$;

$\overrightarrow{CN} = -2\overrightarrow{CB}$, suy ra N thuộc tia BC và $CN = 2BC$ (C ở giữa B và N).

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3} \vec{u} - \vec{v}$$

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = -2\vec{u} + 3\vec{v}$$

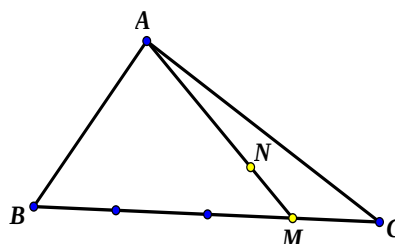
$$\text{Do đó } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{3} \vec{u} - 2\vec{u} + 3\vec{v} = -\frac{7}{3} \vec{u} + 3\vec{v}.$$

Câu 95: Cho tam giác ABC , trên cạnh BC lấy M sao cho $\overrightarrow{BM} = -3\overrightarrow{CM}$, trên đoạn AM lấy N sao cho

$$\overrightarrow{AN} = \frac{5}{7} \overrightarrow{AM}. \text{ Gọi } G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC. \text{ Hãy phân tích vector } \overrightarrow{MN} \text{ qua các vector } \overrightarrow{GA}$$

và $\overrightarrow{GB}$.

Lời giải



$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$
$$\begin{aligned}\frac{CD}{DB} &= \frac{AC}{AB} = \frac{6}{4} \Rightarrow \frac{CD}{CD+DB} = \frac{6}{6+4} \\ &\Rightarrow \frac{CD}{CB} = \frac{6}{10} \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \frac{3}{5} \overrightarrow{CB}.\end{aligned}$$

Tương tự, ta có $\frac{CE}{CA} = \frac{5}{9} \Rightarrow \overrightarrow{CE} = \frac{5}{9} \overrightarrow{CA}$.

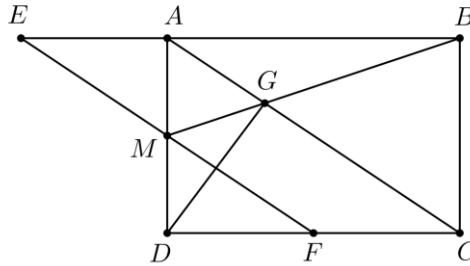
Ta có $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MN}$ nên $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{CM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{CM}$.

$$3(n(1-m)\overrightarrow{AB} + m.n\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 3n(1-m)\overrightarrow{AB} + 3m.n\overrightarrow{AC} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \left(3n - 3mn - \frac{5}{6}\right)\overrightarrow{AB} + (3m.n - 1)\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 3n - 3mn - \frac{5}{6} = 0 \\ 3m.n - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m.n = \frac{1}{3}.$$

Câu 99: Cho hình chữ nhật $ABCD$. F là trung điểm của cạnh CD , E là điểm xác định bởi $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{EA}$. Gọi G là trọng tâm tam giác BEF . Phân tích vector $\overrightarrow{DG}$ theo hai vector $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$.

Lời giải



♦ Gọi M là trung điểm của AD .

♦ Mà $\begin{cases} EA = DF \\ EA \parallel DF \end{cases} \Rightarrow M$ là trung điểm của $EF \Rightarrow G \in BM$.

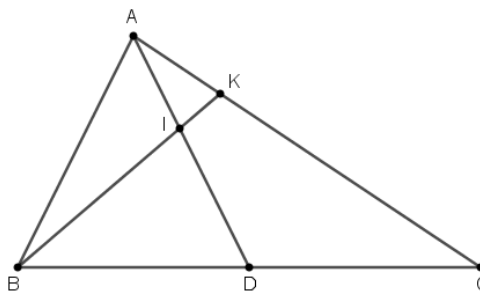
♦ Xét $\triangle BEM$: $\frac{BA}{BE} = \frac{2}{3}$ mà $\frac{BG}{BM} = \frac{2}{3}$ nên $AG \parallel EM$, mặt khác $AC \parallel EM$.

Do đó, $\begin{cases} G \in AC \\ \frac{AG}{EM} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AG}{AC} = \frac{1}{3} \end{cases}$.

♦ Vậy $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

Câu 100: Cho tam giác ABC . Gọi D là trung điểm của cạnh BC và K là một điểm trên cạnh AC sao cho $AK = \frac{1}{4}AC$. Gọi I là giao điểm của AD và BK . Tính tỉ số $\frac{AI}{AD}$.

Lời giải



♦ Đặt $\frac{AI}{AD} = x$. Khi đó $\overrightarrow{AI} = x\overrightarrow{AD}$.

- ♦ Ta sẽ biểu diễn $\overrightarrow{BI}$, $\overrightarrow{BK}$ theo 2 vector $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + x \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \left(\frac{x}{2} - 1\right)\overrightarrow{AB} + \frac{x}{2}\overrightarrow{AC}.$$

$$\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}.$$

- ♦ Vì B, I, K thẳng hàng nên tồn tại $k \neq 0$ sao cho: $\overrightarrow{BI} = k\overrightarrow{BK}$.

$$\text{Khi đó: } \left(\frac{x}{2} - 1\right)\overrightarrow{AB} + \frac{x}{2}\overrightarrow{AC} = k\left(-\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2} - 1 + k\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{x}{2} - \frac{k}{4}\right)\overrightarrow{AC} = \vec{0} \quad (*).$$

Vì $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ là hai vector không cùng phương nên từ (*) ta phải có:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - 1 + k = 0 \\ \frac{x}{2} - \frac{k}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} - 1 + 2x = 0 \\ k = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ k = \frac{4}{5} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } \frac{AI}{AD} = \frac{2}{5}.$$

Cách 2:

- ♦ Đặt $\frac{AI}{AD} = x$. Khi đó $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{x}\overrightarrow{AI}$.

- ♦ Ta có: $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \Leftrightarrow \frac{1}{x}\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AK}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{x}{2}\overrightarrow{AB} + 2x\overrightarrow{AK}$.

- ♦ Vì B, I, K thẳng hàng nên $\frac{x}{2} + 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$.

$$\text{Vậy } \frac{AI}{AD} = \frac{2}{5}.$$

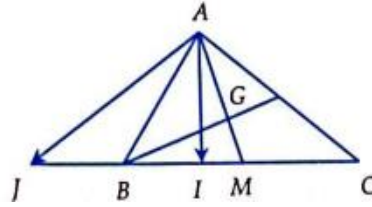
Cách 3:

- ♦ Áp dụng định lý Menelaus trong $\triangle ACD$ ta có:

$$\frac{BD}{BC} \cdot \frac{IA}{ID} \cdot \frac{KC}{KA} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{IA}{ID} \cdot 3 = 1 \Rightarrow \frac{IA}{ID} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AI}{AD} = \frac{2}{5}.$$

Câu 101: Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi I là một điểm trên cạnh BC sao cho $2CI = 3BI$ và J là một điểm nằm ngoài đoạn BC sao cho $5JB = 2JC$. Hãy phân tích vector $\overrightarrow{AG}$ theo các vector $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AJ}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của cạnh BC .

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên ta có $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ (*)

Ta có:

$$\begin{cases} 2CI = 3BI \\ I \in BC \end{cases} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IC} = -3\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AI}) = -3(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} \quad (1)$$

Mặt khác:

$$\begin{cases} 5JB = 2JC \\ J \in BC \end{cases} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{JB} = 2\overrightarrow{JC} \Leftrightarrow 5(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AJ}) = 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AJ}) \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AJ} = 5\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \quad (2)$$

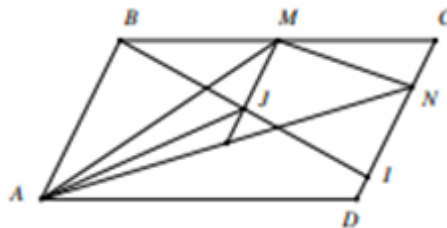
Từ (1) & (2), ta có
$$\begin{cases} \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} \\ \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AJ} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AI} \\ 5\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AJ} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = \frac{5}{8}\overrightarrow{AI} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AJ} \\ \overrightarrow{AC} = \frac{25}{16}\overrightarrow{AI} - \frac{9}{16}\overrightarrow{AJ} \end{cases} \quad (3)$$

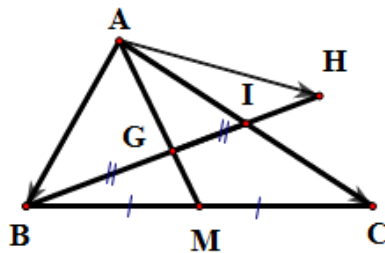
Thay vào, ta có $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{8}\overrightarrow{AI} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AJ} + \frac{25}{16}\overrightarrow{AI} - \frac{9}{16}\overrightarrow{AJ}\right) = \frac{35}{48}\overrightarrow{AI} - \frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$.

Câu 102: Cho hình bình hành $ABCD$. Lấy M, N sao cho $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$. Gọi I, J là hai điểm thỏa mãn $\overrightarrow{CI} = \alpha\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BJ} = \beta\overrightarrow{BI}$. Xác định α, β để J là trọng tâm tam giác AMN .

Lời giải



Ta có: $\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JM} + \overrightarrow{JN} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BJ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CI}$
 $= \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + (-3\beta + 1)\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + (-3\beta + 1)(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CI}) + \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CI}$



Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC .

Gọi M, I lần lượt là trung điểm của BC và AC .

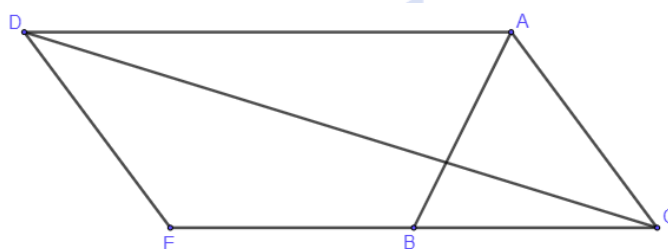
$$\text{Ta có } 2\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HB} + 2\overrightarrow{HC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{HI} - \overrightarrow{HB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{HI} - (\overrightarrow{HI} + \overrightarrow{IB}) = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{HI} - \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IH} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{IH} = -\overrightarrow{IG}.$$

Vậy là H là điểm đối xứng với G qua I .

Câu 105: Cho $\triangle ABC$. Xác định điểm D thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CD}$ với M tùy ý.

Lời giải



$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}.$$

Gọi E là điểm sao cho $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{CB}$.

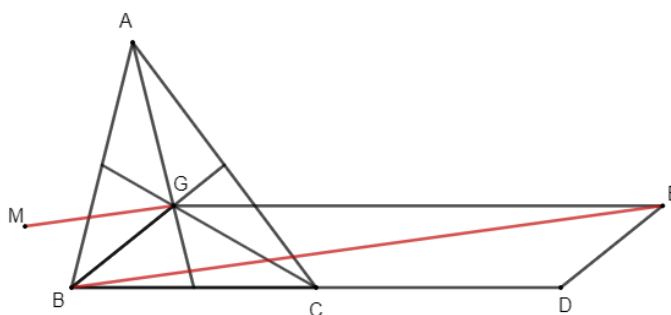
Khi đó: $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CE}$.

Vậy D là đỉnh của hình bình hành $ACED$.

Câu 106: Cho $\triangle ABC$. Xác định điểm M sao cho: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{BC}$.

Lời giải

* Cách 1:



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC .

Ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MG} = 3\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}$

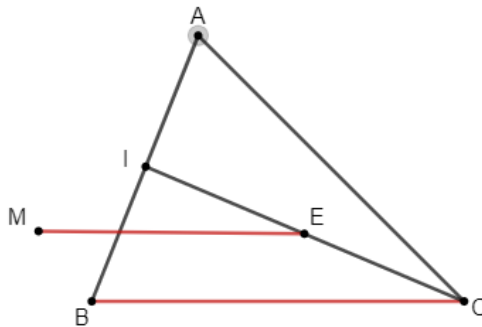
$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MG} = 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MG} = 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BG}$.

Gọi điểm D đối xứng với điểm B qua C và E là đỉnh thứ tư của hình bình hành $BDEG$.

Khi đó: $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC} \Rightarrow 4\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BG} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{BE} \Leftrightarrow \overrightarrow{MG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BE}$.

Điểm M được xác định như hình vẽ.

* Cách 2:



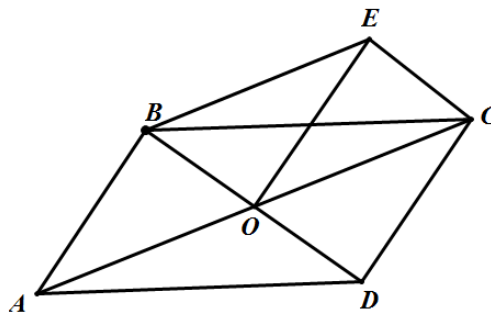
Gọi I là trung điểm của AB và E là trung điểm của IC .

Ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MC}) = 3\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow 2.2\overrightarrow{ME} = 3\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{ME} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

Câu 107: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Xác định vị trí điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AM}$.

Lời giải



Gọi E là đỉnh thứ tư của hình bình hành $BOCE$. Khi đó tứ giác $DCEO$ cũng là hình bình hành. Do đó $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.

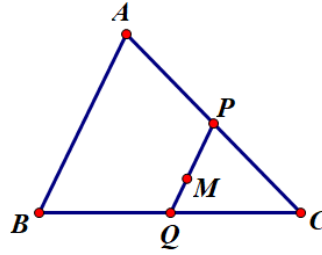
Xét hình bình hành $BOCE$, ta có $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE}$.

Mà $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{AB}$.

Khi đó $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$, suy ra M trùng với đỉnh B .

Câu 108: Cho tam giác ABC . Tìm điểm M sao cho: $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + 2(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = \vec{0} \quad (1)$.

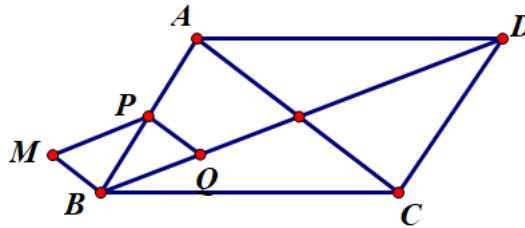
Gọi P là trung điểm của AC và Q là trung điểm của BC .

Khi đó $(1) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MP} + 4\overrightarrow{MQ} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MP} = -2\overrightarrow{MQ}$.

Vậy điểm M nằm trên đoạn thẳng PQ sao cho $MP = 2MQ$.

Câu 109: Cho hình bình hành $ABCD$. Tìm điểm M sao cho: $2\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$.

Lời giải



Ta có:

$$2\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MD} = \vec{0} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}) + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MD} = \vec{0} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}) + \overrightarrow{BD} = \vec{0} \quad (1).$$

Gọi P là trung điểm của AB và Q là điểm nằm trên đoạn BD sao cho $BD = 4BQ$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow 4\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{BD} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{PM} + 4\overrightarrow{BQ} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{BQ}$.

Vậy M là điểm sao cho tứ giác $MPQB$ là hình bình hành.

Câu 110: Cho tam giác ABC . Tìm vị trí điểm M sao cho:

a) $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Lời giải

a) Gọi I là trung điểm BC , suy ra: $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MI} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MI} = \vec{0}$.

Vậy M là trung điểm của AI .

b) Gọi K là trung điểm AB , suy ra: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MK} \Leftrightarrow \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MK} \Leftrightarrow \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{KC}$.

Hay $\overrightarrow{KM} = -\overrightarrow{KC}$.

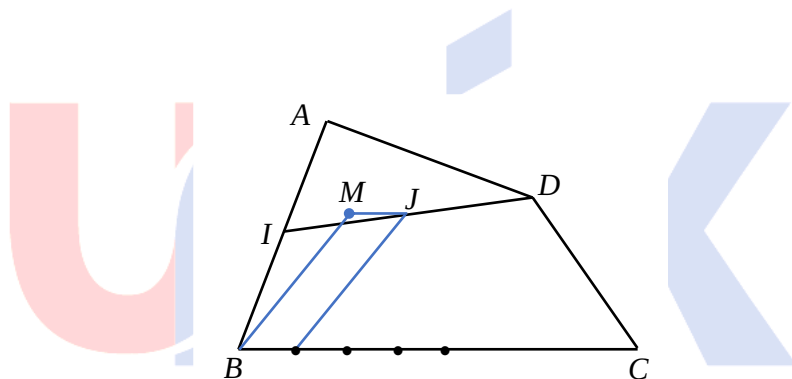
Vậy điểm M là điểm đối xứng của điểm C qua điểm K .

Cách 2:

Vây M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ACBM$.

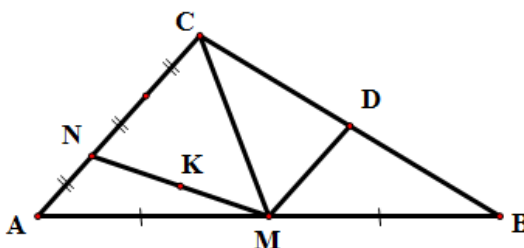
Lời giải

Cách 2:



Điểm M được dựng như hình vẽ.

Lời giải



$$\diamond \text{ Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM} \\ \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AN} \end{cases} \Rightarrow 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{AK} = \vec{0} \Leftrightarrow 3.2\overrightarrow{AM} + 2.3\overrightarrow{AN} - 12\overrightarrow{AK} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}).$$

Suy ra K là trung điểm của MN .

$$\diamond \text{ Ta có: } 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{KD} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} - 12(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AK}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} + 12\overrightarrow{AK} = 12\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = 12\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

Suy ra D là trung điểm của BC .

Câu 113: Cho $\triangle ABC$ với $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Xác định điểm I thỏa mãn đẳng thức $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Lời giải

Lấy A' trên BC sao cho $\frac{A'B}{A'C} = \frac{c}{b}$ hay AA' là đường phân giác.

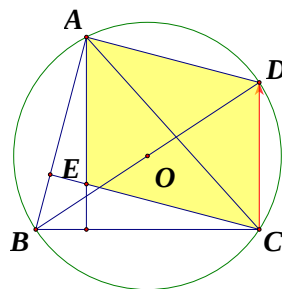
$$\text{Ta có: } a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow a\overrightarrow{IA} + (b+c)\overrightarrow{IA'} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow I \text{ thuộc đoạn } AA' \text{ và } \frac{IA}{IA'} = \frac{b+c}{a} = \frac{c}{\frac{ac}{b+c}} = \frac{BA}{BA'}$$

$\Rightarrow I$ là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

Câu 114: Cho tam giác nhọn ABC tùy ý, nội tiếp đường tròn tâm O đường kính BD . Xác định vị trí điểm E sao cho $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CD}$.

Lời giải



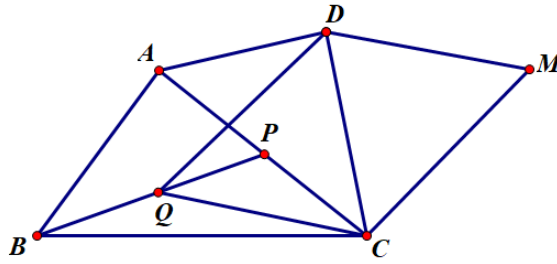
Vì BD là đường kính nên $AD \perp AB$, $CD \perp CB$.

Tam giác ABC là tam giác nhọn nên A, D, C không thẳng hàng, lại có $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CD}$ nên tứ giác $ADCE$ là hình bình hành. Do đó $AE \parallel CD$ và $CE \parallel AD$.

Kết hợp ta suy ra $CE \perp AB$, $AE \perp CB$.

Vậy E là trực tâm tam giác ABC .

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC} + 4\overrightarrow{MD} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC} + 2(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} \quad (1).$$

Gọi P là trung điểm của AC và Q là trung điểm của BP .

Khi đó $(1) \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{CP} + 2\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{CQ} \Leftrightarrow \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CQ}.$

Vậy M là điểm sao cho tứ giác $MDQC$ là hình bình hành.

Câu 116: Cho tam giác ABC đều, có cạnh bằng a . Tìm điểm M sao cho

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} = \frac{a^2}{6}.$$

Lời giải

Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$. Suy ra G là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ và G cố định.

Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} \Rightarrow (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2 = 9(\overrightarrow{MG})^2$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 + 2(\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}) = 9MG^2.$$

$$\text{Mà } \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2$$

$$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$$

$$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \vec{0} = 3MG^2 + 3GA^2 = 3MG^2 + 3\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3MG^2 + a^2.$$

$$\text{Do đó (1)} \Leftrightarrow 3MG^2 + a^2 + 2(\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}) = 9MG^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2 \cdot \frac{a^2}{6} = 6MG^2 \Leftrightarrow MG^2 = \frac{2a^2}{9}.$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm G bán kính $R = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

TÌM TẬP HỢP ĐIỂM THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

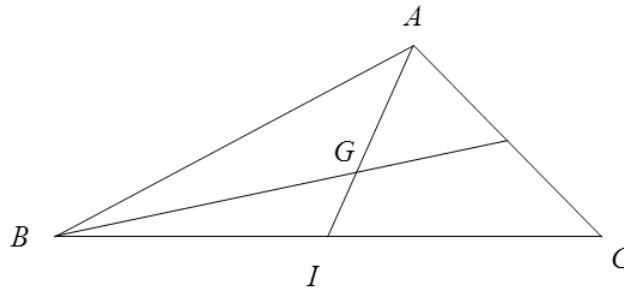
Áp dụng các quy tắc về phép cộng, trừ các vector và các kết quả về tập hợp điểm đã học.

- Nếu $MA = MB$ thì tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn thẳng AB .
- Nếu $MI = AB$ thì tập hợp điểm M là đường tròn tâm I , bán kính AB .
- Nếu $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{AB}$ thì tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua I và song song với đường thẳng AB .

Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn điều kiện

Câu 117: $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$.

Lời giải



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và I là trung điểm đoạn BC , ta có:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}; \quad 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MA} - (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MI} = 2\overrightarrow{IA}.$$

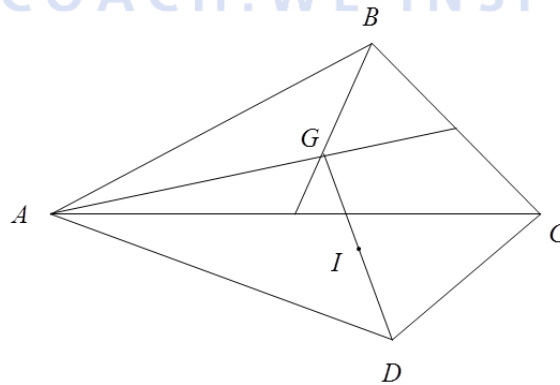
$$\text{Do đó } |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow 3MG = 2IA \Leftrightarrow MG = \frac{2}{3}IA \Leftrightarrow MG = GA.$$

Vậy, tập hợp điểm M là đường tròn tâm G , bán kính GA .

Cho tứ giác $ABCD$. Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD} = k\overrightarrow{AB}$, $k \neq 0$.

Câu 118:

Lời giải



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và I là trung điểm đoạn DG , ta có

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG};$$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG} + 3\overrightarrow{MD} = k\overrightarrow{AB}.$$

$$\Leftrightarrow 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MD}) = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 3.2\overrightarrow{MI} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} = \frac{k}{6}\overrightarrow{AB}.$$

Suy ra tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua trung điểm I của đoạn DG và song song với AB .

Câu 119: Cho tam giác ABC . Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn: $|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}|$.

Lời giải

Gọi I là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0}$, khi đó ta có:

$$2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} = 9\overrightarrow{MI} + (2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC}) = 9\overrightarrow{MI} \text{ và } \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB} \text{ nên}$$

$$|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}| \Leftrightarrow |9\overrightarrow{MI}| = |\overrightarrow{AB}| \Leftrightarrow MI = \frac{AB}{9}.$$

Vậy quỹ tích của M là đường tròn tâm I bán kính $\frac{AB}{9}$.

Câu 120: Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn điều kiện:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = k(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}) \text{ với } k \text{ là số thực thay đổi}$$

Lời giải

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) - 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC})$$

$$= 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{HB}.$$

$$\text{Với } H \text{ điểm thỏa mãn } \overrightarrow{AH} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}. \text{ Suy ra } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = k(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}).$$

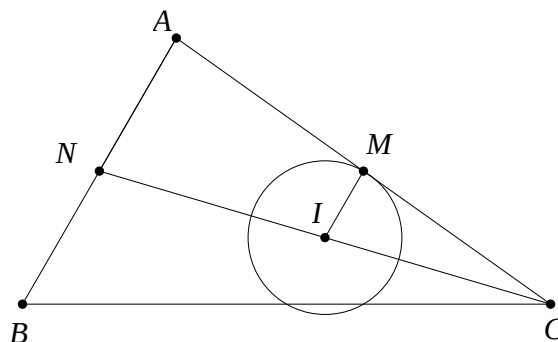
$$\text{Lấy } E \text{ là trung điểm của } AB \Leftrightarrow 2\overrightarrow{ME} = 2k\overrightarrow{HB} \Leftrightarrow \overrightarrow{ME} = k\overrightarrow{HB}.$$

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua E và song song với HB .

Câu 121: Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức vector:

$$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{AB}|.$$

Lời giải



Gọi N là trung điểm của AB và gọi I là điểm thỏa mãn đẳng thức vector: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

$$\text{Khi đó: } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IN} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IN} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

Như vậy I là trung điểm của NC .

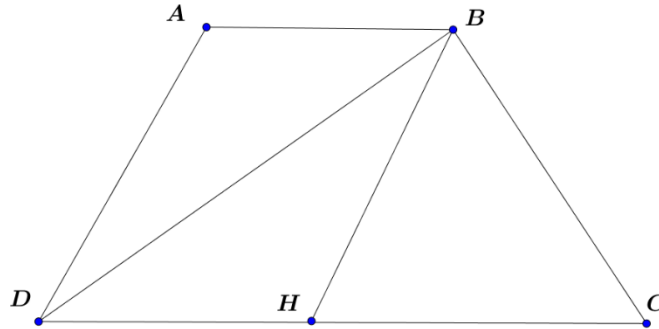
$$\text{Ta có: } |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{AB}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{IC}| = |\overrightarrow{AB}|$$

$$\Leftrightarrow |4\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC}| = |\overrightarrow{AB}| \Leftrightarrow |4\overrightarrow{MI}| = |\overrightarrow{AB}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MI}| = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{4}.$$

Như vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I và bán kính $r = \frac{AB}{4}$.

Câu 122: Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), có $CD = 2AB$, H là trung điểm của cạnh DC . Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $|\overrightarrow{MH} - \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{MH} - \overrightarrow{HD}|$.

Lời giải



Ta có: $AB = DH = HC = \frac{1}{2}DC$. Xét tứ giác $ABHD$, ta có: $\begin{cases} AB = DH \\ AB \parallel DH \end{cases}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $ABHD$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{DA}$. Ta có:

$$|\overrightarrow{MH} - \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{MH} - \overrightarrow{HD}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HB}| = |\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HC}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow MB = MC.$$

Suy ra tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức vector là đường trung trực của đoạn thẳng BC .

Câu 123: Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}| = 2|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$.

Lời giải

Lấy điểm I thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Hệ thức trở thành

$$(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC}) + 2(\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IB}) = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{ID} + 2\overrightarrow{BC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{CB}.$$

Hệ thức chứng tỏ I là điểm cố định.

Ta có biến đổi:

$$\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) - 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}) = 2\overrightarrow{MI} + (\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC}) = 2\overrightarrow{MI}.$$

$$\text{Giả thiết của bài toán trở thành } |2\overrightarrow{MI}| = 2|\overrightarrow{CB}| \Leftrightarrow IM = BC.$$

Hệ thức chứng tỏ điểm M thuộc đường tròn tâm I , bán kính $R = BC$.

Vậy tập hợp các điểm M cần tìm là đường tròn tâm I , bán kính $R = BC$.

Câu 124: Cho ngũ giác đều $ABCDE$. Tìm tập hợp các điểm M sao cho biểu thức $T = 2|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| + 3|\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Gọi P là trọng tâm tam giác ABC và Q là trung điểm của đoạn thẳng DE . Từ giả thiết ta thấy P và Q là các điểm cố định.

Khi đó: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} = 2\overrightarrow{MQ}$.

Từ giả thiết ta được: $T = 2|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| + 3|\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}| = 2|3\overrightarrow{MP}| + 3|2\overrightarrow{MQ}|$ hay

$T = 6MP + 6MQ = 6(MP + MQ) \geq 6PQ$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M thuộc đoạn PQ .

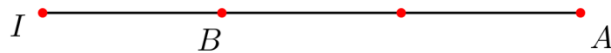
Do đó giá trị của biểu thức trên nhỏ nhất bằng $6PQ$ với P là trọng tâm tam giác ABC và Q là trung điểm của đoạn thẳng DE . Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M thuộc đoạn PQ .

Vậy tập hợp các điểm M cần tìm là đoạn thẳng PQ .

Câu 125: Cho hai điểm A, B phân biệt cố định. Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn điều kiện $|\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}| = 2|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$.

Lời giải

Gọi I là điểm thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$. Khi đó I là điểm cố định như hình vẽ:

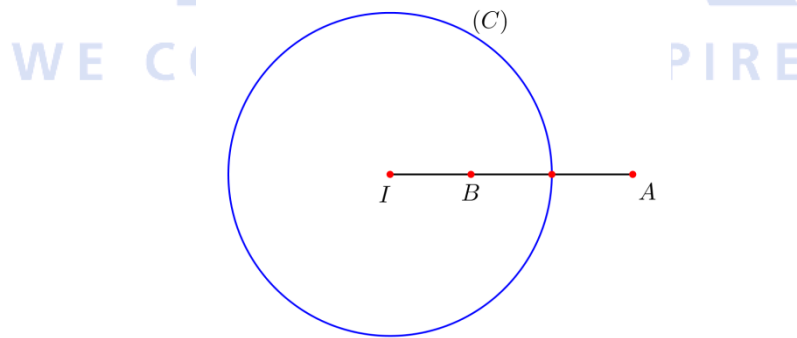


Từ $|\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}| = 2|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$ ta suy ra:

$$|\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{MI} - 3\overrightarrow{IB}| = 2|\overrightarrow{BA}| \Rightarrow |-2\overrightarrow{MI} + (\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB})| = 2BA \Rightarrow 2MI = 2BA \Rightarrow MI = BA.$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn (C) có tâm I , bán kính bằng độ dài đoạn thẳng AB .

:



Câu 126: Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp các điểm M sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = \frac{3}{2}|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$.

Lời giải

Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$, ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

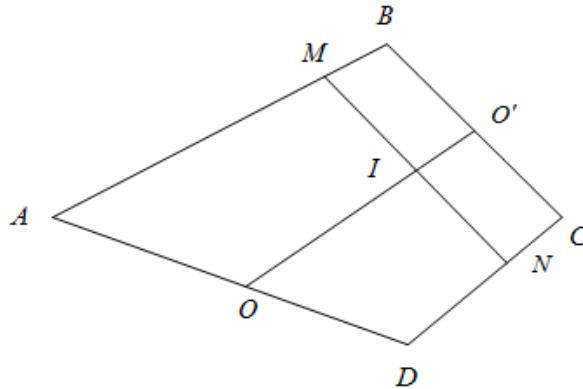
Gọi J trung điểm BC , suy ra: $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MJ}$.

$$\text{Do đó } |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = \frac{3}{2}|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow 3|\overrightarrow{MG}| = 3|\overrightarrow{MJ}| \Leftrightarrow MG = MJ.$$

Vậy tập hợp các điểm M cần tìm chính là đường trung trực đoạn GJ .

Câu 127: Cho tứ giác $ABCD$. Với số k tùy ý, lấy các điểm M và N sao cho $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DN} = k\overrightarrow{DC}$. Tìm tập hợp các trung điểm I của đoạn thẳng MN khi k thay đổi.

Lời giải



Gọi O, O' lần lượt là trung điểm của AD và BC , ta có: $\overrightarrow{OO'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$.

Vì O và I lần lượt là trung điểm của AD và MN nên

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{DN}) = \frac{k}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) = k\overrightarrow{OO'}.$$

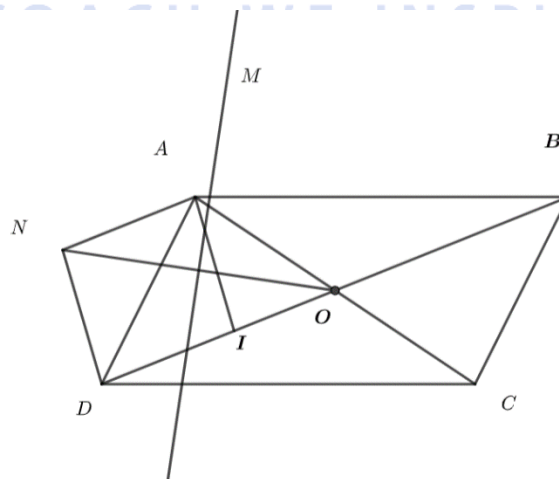
Suy ra O, I, O' thẳng hàng.

Vậy, khi k thay đổi, tập hợp các điểm I là đường thẳng OO' .

Câu 128: Cho hình thoi $ABCD$ có định tâm O , cạnh bằng a . Gọi I là trung điểm của đoạn DO . Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn điều kiện: $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = 4|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{ID}|$.

Lời giải

Gọi điểm N sao cho $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$



Khi đó ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{MO}$

Vì $ABCD$ là hình thoi suy ra $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

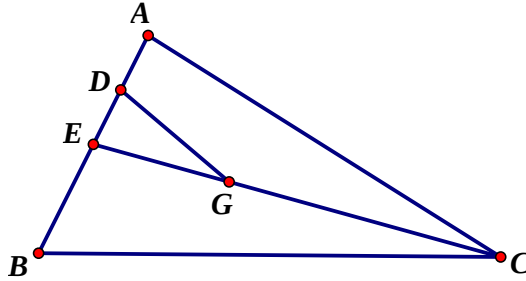
Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{MN}$

Từ 1 và 2 suy ra $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = 4|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{ID}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MO}| = |\overrightarrow{MN}|$

Suy ra tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn ON .

Câu 129: Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp điểm M sao cho biểu thức $T = \left| 4|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| - 3|\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MA}| \right|$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải



Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC , ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

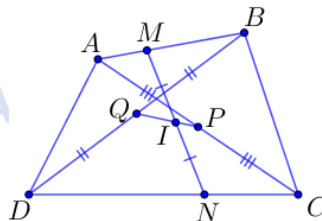
Gọi D là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{DB} = -3\overrightarrow{DA}$, ta có $\overrightarrow{DB} = -3\overrightarrow{DA} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MA} = 4\overrightarrow{MD}$.

Ta được $T = \left| 4|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| - 3|\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MA}| \right| = \left| 12|\overrightarrow{MG}| - 12|\overrightarrow{MD}| \right| = 12|MG - MD| \leq 12GD$.

Dấu bằng xảy ra khi M nằm trên đường thẳng GD .

Câu 130: Cho tứ giác $ABCD$. Hai điểm M, N lần lượt thay đổi trên các cạnh AB và CD sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{CD}$. Tìm tập hợp trung điểm I của đoạn MN .

Lời giải



Từ giả thiết đặt $\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{CD} = k$ với $0 \leq k \leq 1$.

Vì điểm M thuộc cạnh AB , điểm N thuộc cạnh CD nên $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{CD}$.

Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn AC và BD . Ta có:

Với điểm O bất kì thì $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON})$ và $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$.

Trừ theo vế của cho ta được:

$\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{PI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CN})$.

Tương tự ta chứng minh được $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$.

Từ, và $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{CD}$ suy ra $\overrightarrow{PI} = \frac{1}{2}(k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{CD}) = \frac{k}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = k\overrightarrow{PQ}$.

Hệ thức $\overrightarrow{PI} = k\overrightarrow{PQ}$ với $0 \leq k \leq 1$ chứng tỏ ba điểm P , I và Q thẳng hàng và điểm I thuộc đoạn thẳng PQ .

Vậy tập hợp các điểm I là trung điểm của đoạn MN là đoạn thẳng PQ với P , Q lần lượt là trung điểm của các đoạn AC và BD .

Câu 131: Cho ΔABC có M là trung điểm cạnh BC . Tìm tập hợp điểm I thỏa: $\overrightarrow{IA} + (1-k)\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$, $k \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{IA} + (1-k)\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + (1-k)(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + (1-k)\overrightarrow{IA} + (1-k)\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow (2-k)\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow (2-k)\overrightarrow{IA} = 2k\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow (k-2)\overrightarrow{AI} = 2k\overrightarrow{AM}$$

+) Với $k = 2 \Rightarrow 0 \cdot \overrightarrow{AI} = 4\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \vec{0} \Rightarrow$ không có điểm I thỏa đề bài hay tập hợp điểm I là tập rỗng.

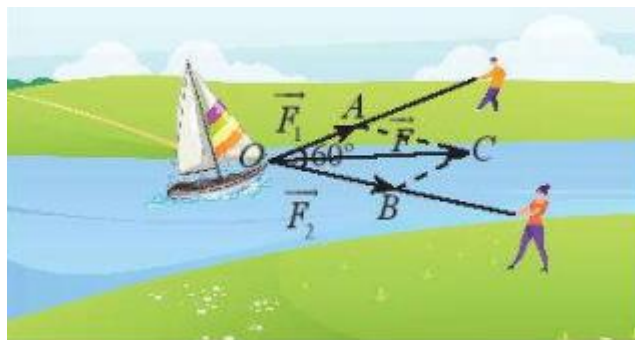
+) Với $k \neq 2 \Rightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{2k}{k-2}\overrightarrow{AM}$ Vì $\frac{2k}{k-2} = 2 + \frac{4}{k-2} \neq 2, \forall k \neq 2$ và phương trình

$$2 + \frac{4}{k-2} = m \Rightarrow k = 2 + \frac{4}{m-2}, \forall m \neq 2.$$

Nghĩa là $\frac{2k}{k-2}$ có tập giá trị là $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Vậy, khi $k \neq 2$, tập hợp điểm I là đường thẳng AM bỏ đi điểm I_0 mà $\overrightarrow{AI_0} = 2\overrightarrow{AM}$.

Câu 132: Hai người cùng kéo một con thuyền với hai lực $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{OB}$ có độ lớn bằng nhau và bằng 100 N. Cho biết góc giữa hai vectơ là 60° . Tìm độ lớn của vectơ hợp lực $\vec{F}$ là tổng của hai lực $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$



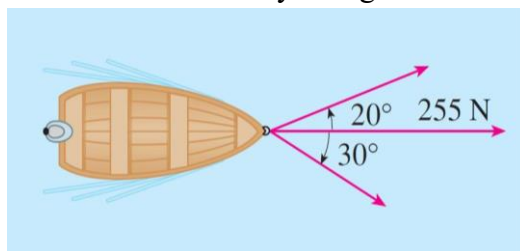
Lời giải

Theo quy tắc hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{OC}$, như hình vẽ.

Ta có $AOB = 60^\circ$, $OA = OB = 100$, nên tam giác OAB đều, suy ra $OC = 100\sqrt{3}$.

Vậy $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = |\vec{OC}| = 100\sqrt{3} \text{ (N)}.$

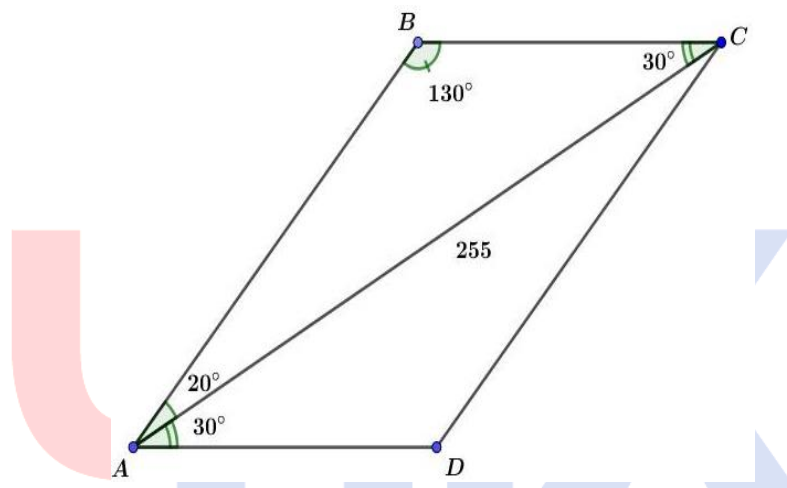
Câu 133: Một chiếc thuyền được kéo vào bờ bởi 2 dây thừng.



Để có được lực kéo 255 N, thì độ lớn của lực kéo ở mỗi dây thừng là bao nhiêu?

Lời giải

Biểu diễn lực kéo là vector $\vec{AC}$ và hai lực thành phần là các vector $\vec{AB}$, $\vec{AD}$, ta có hình bình hành $ABCD$ và các góc được thể hiện như trên hình sau.



Xét $\triangle ABC$, ta có: $AC = 255$; $BAC = 20^\circ$; $BCA = CAD = 30^\circ$; $ABC = 130^\circ$.

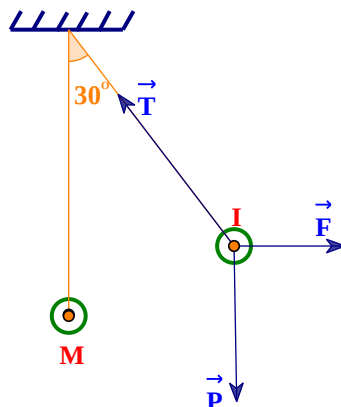
Áp dụng định lí sin ta được: $\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{AC}{\sin 130^\circ} = \frac{BC}{\sin 20^\circ}.$

Suy ra: $AB = \frac{AC \cdot \sin 30^\circ}{\sin 130^\circ} = \frac{255 \cdot \sin 30^\circ}{\sin 130^\circ} \approx 166,439,$

$BC = \frac{AC \cdot \sin 20^\circ}{\sin 130^\circ} = \frac{255 \cdot \sin 20^\circ}{\sin 130^\circ} \approx 113,9.$

Vậy độ lớn của lực kéo trên 2 dây thừng lần lượt là: 166,4 N và 113,9 N.

Câu 134: Một con lắc đơn đang đứng yên tại vị trí cân bằng M . Thực tập viên tác dụng một lực $\vec{F}$ lên con lắc đưa nó đến vị trí I và giữ yên như hình vẽ.

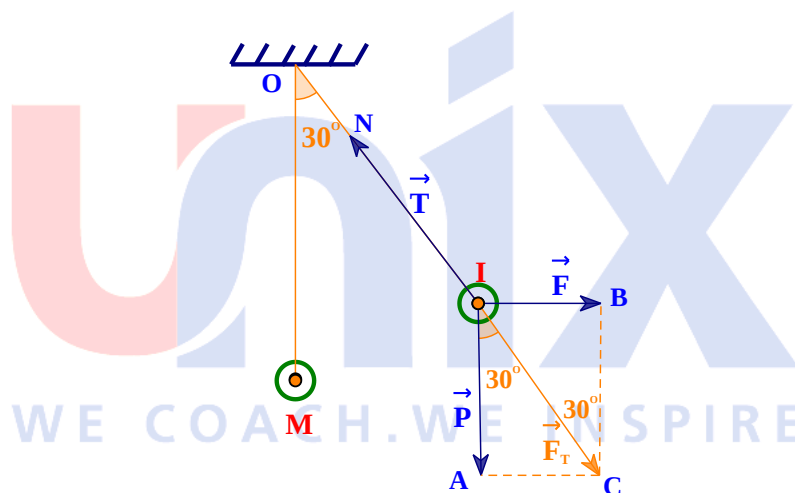


Biết rằng con lắc đang chịu tác động của lực căng dây $\vec{T}$ có cường độ $40N$, trọng lực $\vec{P}$ và lực tác dụng $\vec{F}$. Hãy xác định cường độ của lực $\vec{F}$?

Lời giải

Giả sử $\vec{P} = \vec{IA}$; $\vec{F} = \vec{IB}$ có hợp lực $\vec{F}_T = \vec{IC}$, lực căng dây $\vec{T} = \vec{IN}$.

Đặt $x, x > 0$ là cường độ của lực $\vec{F}$, đơn vị N .



Dễ thấy $IOM = ICB$ suy ra $ICB = 30^\circ$.

Mà $ICB = CIA$ nên $CIA = 30^\circ$.

Ta có $AC = IB = x \Rightarrow IC = \frac{AC}{\sin 30^\circ} = 2x$.

Do con lắc đứng yên tại I nên lực căng dây $\vec{T}$ có cùng cường độ với hợp lực $\vec{F}_T$.

Nên $2x = 40 \Leftrightarrow x = 20$.

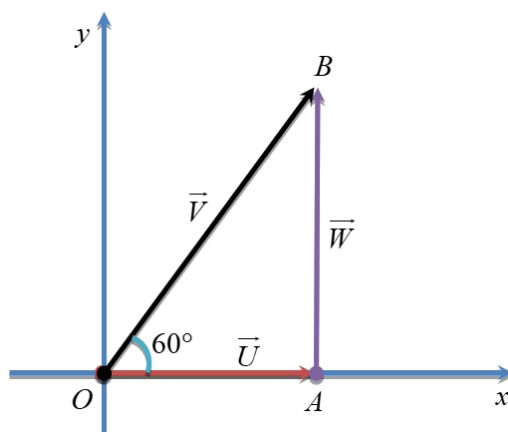
Vậy cường độ của lực tác dụng $\vec{F}$ bằng $20N$.

Câu 135: Một toa xe hành lý đang được kéo với một lực $\vec{V}$ với độ lớn $780N$ và tạo với hướng chuyển động một góc 60° . Phân tích $\vec{V}$ theo hai lực thành phần có phương ngang và phương thẳng đứng và tìm độ lớn của hai lực đó.



Lời giải

Xét hệ trục toạ độ Oxy như hình vẽ với $\overrightarrow{OB} = \vec{V}$ và $(Ox; OB) = 60^\circ$.



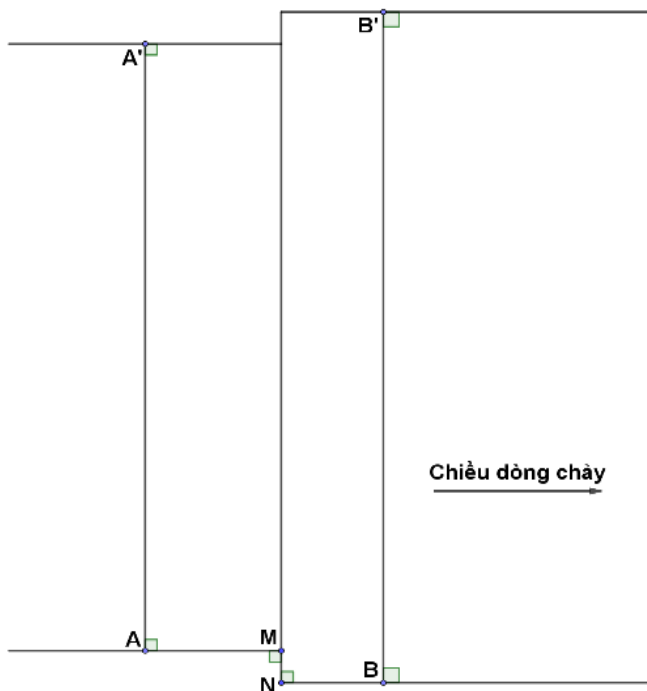
Trên trục Ox xác định điểm A sao cho tam giác OAB vuông tại A . Khi đó, ta có $OB = |\vec{V}| = 780$, $OA = OB \cdot \cos AOB = 780 \cdot \cos 60^\circ = 390$ và $AB = OB \cdot \sin AOB = 780 \cdot \sin 60^\circ = 390\sqrt{3}$.

Hơn nữa, theo quy tắc ba điểm ta có $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$.

Như vậy, với hai lực $\vec{U}$ và $\vec{W}$ sao cho $|\vec{U}| = OA$, $|\vec{W}| = AB$ thì ta có $\vec{V} = \vec{U} + \vec{W}$.

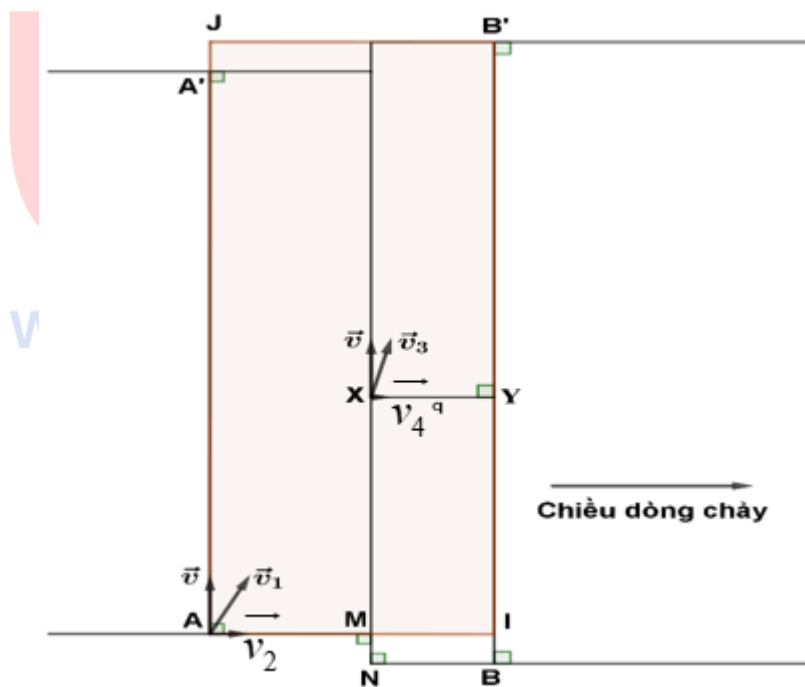
Vậy phân tích lực $\vec{V}$ theo hai lực thành phần là $\vec{U}$ và $\vec{W}$ với $|\vec{U}| = 390 \text{ N}$, $|\vec{W}| = 390\sqrt{3} \text{ N}$.

Câu 136: Hình vẽ bên mô tả một khúc sông có đoạn hẹp và đoạn rộng, cụ thể: $AA' = 380 \text{ m}$ mét, $BB' = 420 \text{ m}$, $MN = 20 \text{ m}$, $AM = 80 \text{ m}$, $NB = 60 \text{ m}$. Vận tốc dòng chảy trên đoạn hẹp và trên đoạn rộng lần lượt là 20 m/phút (m/p) và $10(\text{m/p})$. Một chiếc thuyền xuất phát từ A với vận tốc không đổi có phương vuông góc với dòng chảy và đi đến B' .



Tính quãng đường thuyền đã đi.

Lời giải



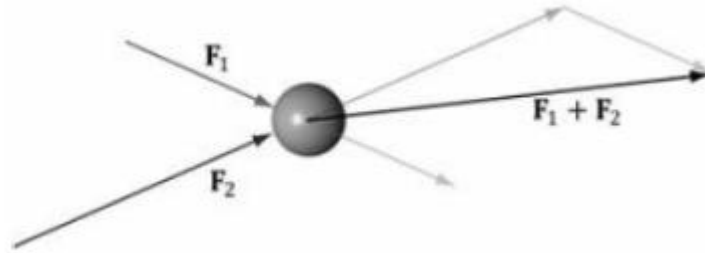
Quá trình di chuyển, thuyền phải đi qua điểm X trên đường thẳng MN . Gọi $\vec{v}$ là vec tơ vận tốc của thuyền.

Gọi $\vec{v}_1$ là vec tơ vận tốc thực tế của thuyền trên đoạn hẹp và $\vec{v}_2$ là vec tơ vận tốc của dòng chảy trên đoạn này, ta có $\vec{v}_1 = \vec{v} + \vec{v}_2$.

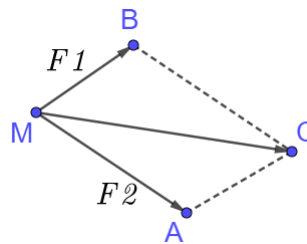
Gọi $\vec{v}_3$ là vec tơ vận tốc thực tế của thuyền trên đoạn rộng và $\vec{v}_4$ là vec tơ vận tốc của dòng chảy trên đoạn này, ta có $\vec{v}_3 = \vec{v} + \vec{v}_4$.

Vậy, vật chịu tác động một lực có độ lớn là $\sqrt{24 + 4\sqrt{5}} (N)$.

Câu 138: Hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ cùng tác động vào một vật tại điểm M lần lượt có cường độ $30N$ và $40N$ và góc tạo bởi hai lực là α . Tìm số đo góc α để cường độ lực tổng hợp của hai lực là lớn nhất, khi đó hãy tìm cường độ lực tổng hợp của hai lực đó.



Lời giải



Từ điểm M , dựng các véc-tơ $\vec{MA} = \vec{F}_2, \vec{MB} = \vec{F}_1$

suy ra $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{MC}$ với $MACB$ là hình bình hành và $AMB = \alpha$ hay $MBC = 180^\circ - \alpha$

Áp dụng định lí cosin cho tam giác MBC , ta có

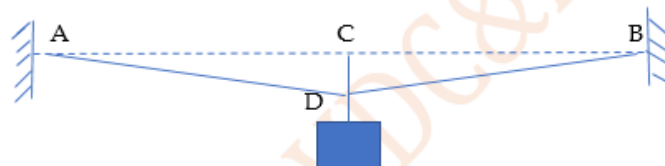
$$|\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = MC = \sqrt{MB^2 + BC^2 - 2 \cdot MB \cdot BC \cdot \cos MBC} = \sqrt{|\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 - 2 \cdot |\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}_2| \cdot \cos(180^\circ - \alpha)}$$

Suy ra $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2|$ lớn nhất khi $\cos(180^\circ - \alpha) = -1 \Leftrightarrow \alpha = 0^\circ$

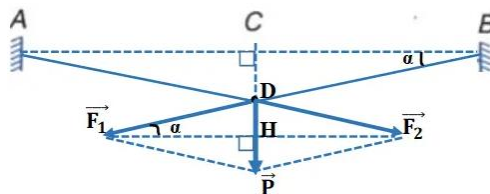
Hay hai véc-tơ $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ cùng hướng.

$$\text{Khi đó } |\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = \sqrt{30^2 + 40^2 - 2 \cdot 30 \cdot 40 \cdot (-1)} = 70N.$$

Câu 139: Treo một vật vào điểm chính giữa của dây thép AB . Khối lượng của vật là $5kg$. Biết $AB = 4m, CD = 20cm$. Tính lực kéo mỗi nửa sợi dây.



Lời giải



Vật tác dụng lên điểm D một lực chính bằng trọng lượng của vật là $\vec{P}$

Ta phân tích $\vec{P}$ thành 2 lực thành phần $\vec{F}_1; \vec{F}_2$, hai lực này có tác dụng làm căng dây DA và dây DB . Do điểm đặt của trọng lực $\vec{P}$ ở trung điểm của dây AB và phương $\vec{P}$ thẳng đứng nên ta có $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = F$.

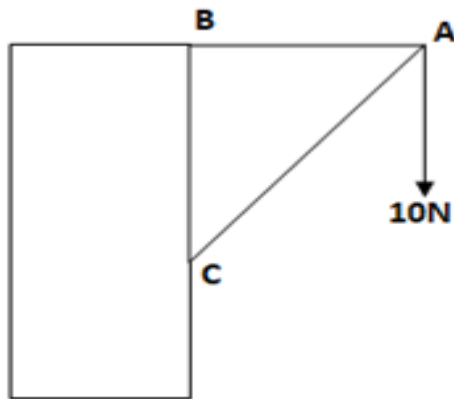
Vẽ hình thoi có 2 cạnh là độ lớn của $\vec{F}_1; \vec{F}_2$ và $|\vec{P}| = P$

Ta có: $P = 2F \sin \alpha = 2F \sin CBD$.

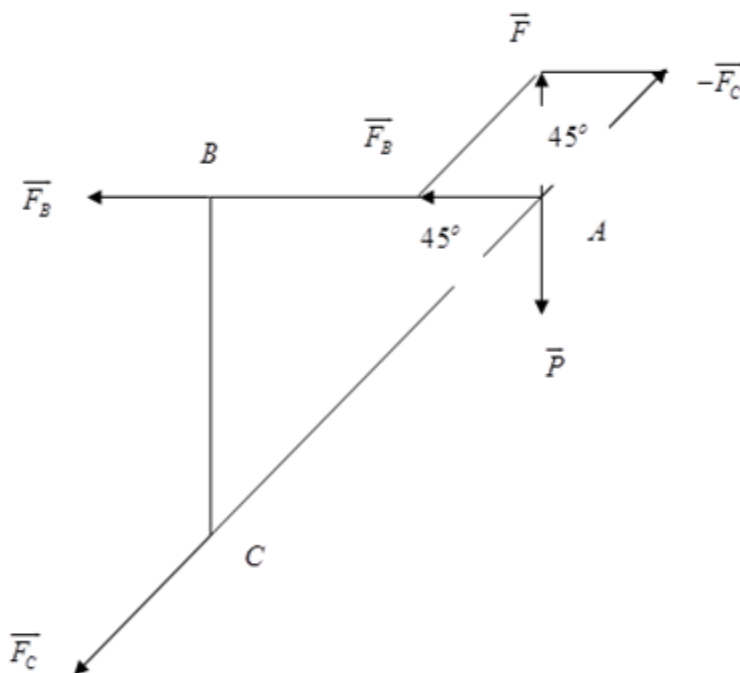
$$\text{Mà } \sin CBD = \frac{CD}{BD} = \frac{CD}{\sqrt{CD^2 + CB^2}} = \frac{0,2}{\sqrt{0,2^2 + 2^2}} = \frac{0,2}{\sqrt{4,04}}.$$

$$\text{Vậy ta có } F = \frac{P}{2 \sin CBD} = \frac{mg}{2 \sin CBD} = \frac{5.10}{2 \sin CBD} = 125\sqrt{4,04}.$$

Câu 140: Một giá đỡ hình tam giác được gắn vào tường như hình vẽ. Tam giác ABC vuông cân tại B . Người ta treo vào điểm A một vật nặng $10(N)$. Tính độ lớn của các lực tác động vào tường tại B và C .



Lời giải



Hệ chất điểm cân bằng nên $\vec{F}_B + (-\vec{F}_C) + \vec{P} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F} = -\vec{P} \Rightarrow |\vec{F}| = |\vec{P}| = 10 (N)$.

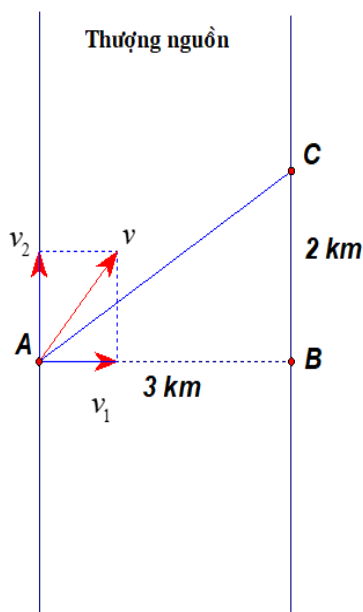
Tam giác ABC vuông cân tại B suy ra:
$$\begin{cases} F_B = |\vec{F}_B| = |\vec{F}| = |\vec{P}| = 10 (N) \\ F_C = |-\vec{F}_C| = |\vec{F}| \sqrt{2} = |\vec{P}| \sqrt{2} = 10\sqrt{2} (N) \end{cases}$$

Câu 141: Một người chèo thuyền muốn băng qua con kênh rộng 3 km và muốn ghé vào bờ tại vị trí cách điểm xuất phát 2 km về phía thượng nguồn. Vận tốc dòng nước là 3,5 km/h và vận tốc của thuyền là 13 km/h.

a) Người ấy nên lái theo hướng nào?

b) Chuyển đi sẽ kéo dài bao lâu?

Lời giải



a) Giả sử A là điểm xuất phát, C là điểm cần đến, B là điểm bên kia bờ sông ngang với vị trí xuất phát.

Gọi v là vận tốc của thuyền. Vector vận tốc được phân tích thành 2 thành phần: phần thứ nhất theo phương vuông góc với bờ sông có độ lớn v_1 , phần thứ hai theo phương song song với bờ sông có độ lớn v_2 . Điều kiện: $v_1 > 0$, $v_2 > 0$. Đơn vị: km/h.

Ta có: $v_1^2 + v_2^2 = v^2 = 169$.

Thời gian tính theo phương AB là $t = \frac{3}{v_1}$.

Vì thuyền đi lên thượng nguồn nên vận tốc theo phương BC là $v_2 - 3,5$.

Thời gian tính theo phương BC là $t = \frac{2}{v_2 - 3,5}$.

Ta có $\frac{2}{v_2 - 3,5} = \frac{3}{v_1} \Rightarrow v_1 = 1,5v_2 - 5,25$. Thay vào ta được $(1,5v_2 - 5,25)^2 + v_2^2 = 169$

$$\Leftrightarrow 3,25v_2^2 - 15,75v_2 - 141,4375 = 0 \Rightarrow v_2 \approx 9,4509.$$

Gọi α là góc giữa hướng đi của thuyền và bờ sông.

Ta có $\cos \alpha = \frac{v_2}{v} \Rightarrow \alpha \approx 43,365^\circ$.

Vậy người đó lái thuyền theo hướng tạo với bờ sông một góc $43,365^\circ$.

b) Thời gian của chuyến đi là $t = \frac{2}{v_2 - 3,5} \approx 0,336$ giờ = 20,160 phút.