



HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

giây) kể từ khi quả bóng được đá lên; h là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá lên từ độ cao $1,2m$. Sau đó 1 giây, nó đạt độ cao $8,5m$ và sau 2 giây sau khi đá lên, nó đạt độ cao $6m$. Hỏi sau bao lâu thì quả bóng chạm đất, kể từ khi được đá lên (tính chính xác đến hàng phần trăm)?

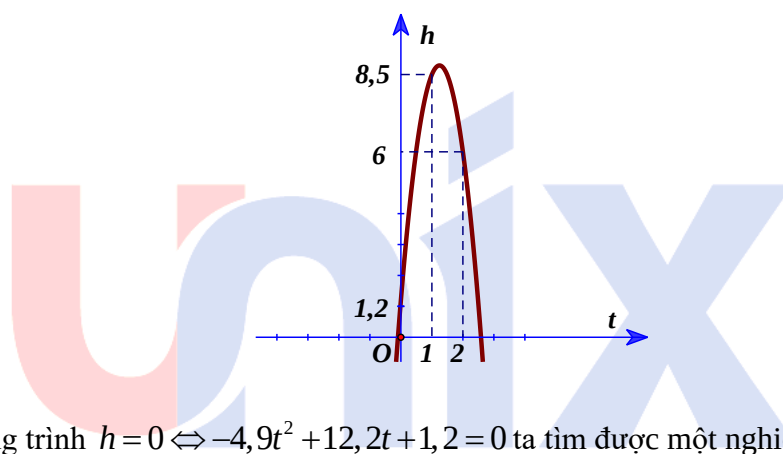
Lời giải

Gọi phương trình của quỹ đạo là $h = at^2 + bt + c$. Từ giả thiết suy ra parabol đi qua các điểm $(0; 1,2), (1; 8,5), (2; 6)$

Từ đó ta có

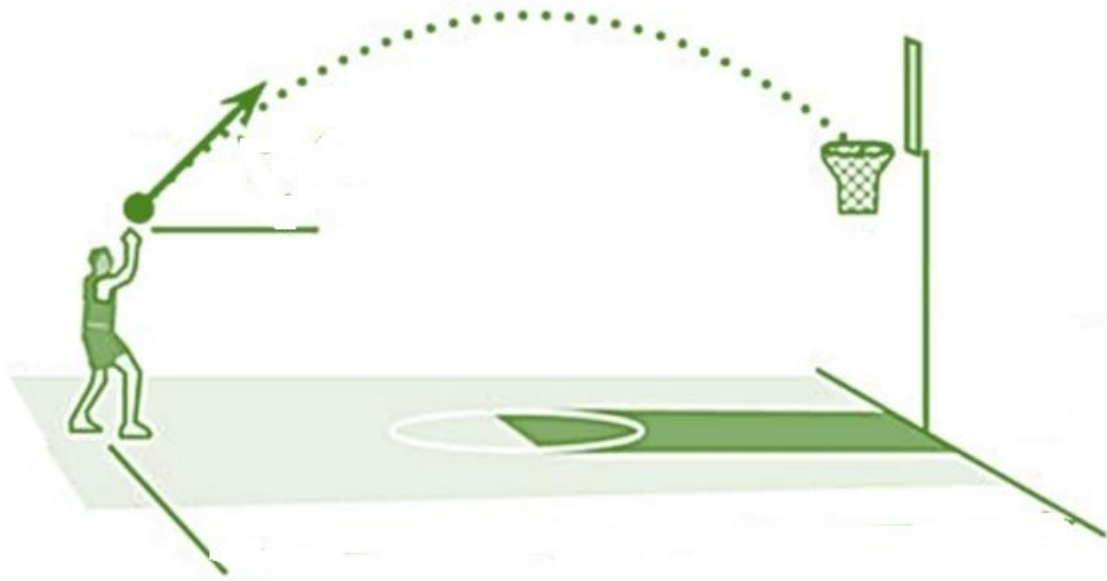
$$\begin{cases} c = 1,2 \\ a + b + c = 8,5 \\ 4a + 2b + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4,9 \\ b = 12,2 \\ c = 1,2 \end{cases}$$

Vậy phương trình của parabol quỹ đạo là $h = -4,9t^2 + 12,2t + 1,2$



Giải phương trình $h = 0 \Leftrightarrow -4,9t^2 + 12,2t + 1,2 = 0$ ta tìm được một nghiệm dương $t \approx 2,58$.

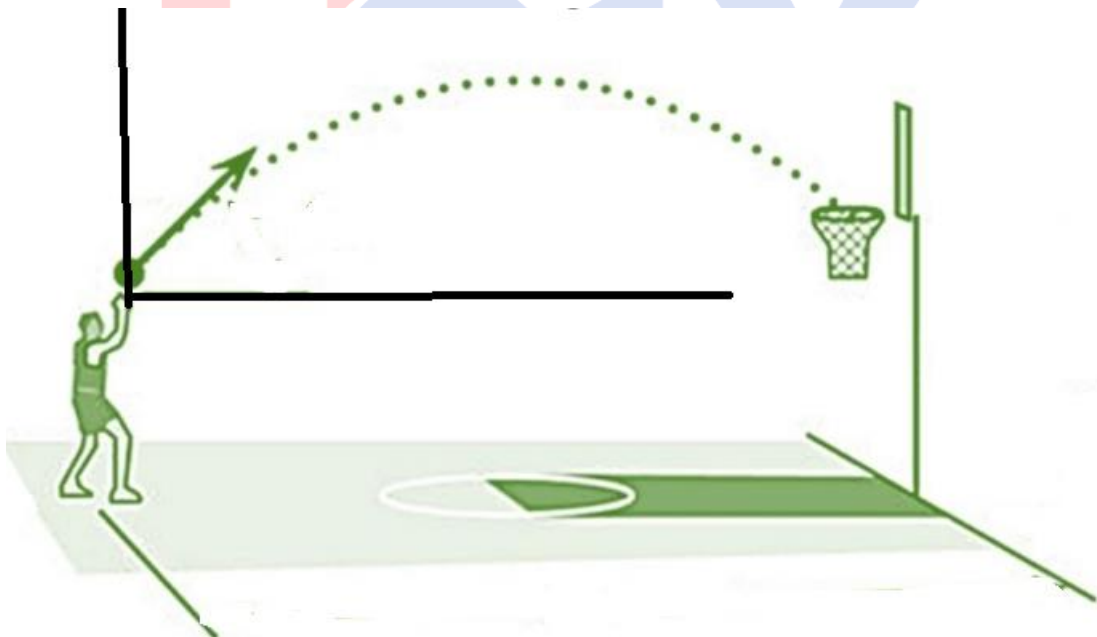
Câu 4: Một vận động viên bóng rổ đứng ném bóng vào rổ. Quỹ đạo chuyển động của quả bóng là hình parabol. Biết quả bóng đạt vị trí cao nhất là $3m$ sau khi vận động viên ném 2 giây. Sau 1 giây ném ra, quả bóng cao hơn đầu vận động viên là $2m$. Lập phương trình quỹ đạo chuyển động của quả bóng?



Lời giải

Giả sử phương trình quỹ đạo chuyển động của quả bóng là: $y = at^2 + bt + c$ (t là thời gian, đơn vị: giây).

Ta có hệ tọa độ như hình vẽ



Do đó theo giả thiết, ta có:
$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ a + b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + b = 0 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ a + b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = -1 \end{cases} \text{ (nhận).}$$

Vậy hàm số cần tìm là $y = -t^2 + 4t - 1$.

Câu 5: Gia đình nhà bạn An muốn làm bể cá cảnh có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, đáy là hình chữ nhật có kích thước chiều dài bằng hai lần chiều rộng và có thể tích bể cá bằng 1m^3 . Biết rằng

chi phí (trên một đơn vị diện tích) để làm phần đáy là 500 nghìn đồng/ $1m^2$ và đất gấp đôi chi phí làm phần xung quanh. Bố bạn An yêu cầu bạn tìm ra kích thước của bể cá sao cho số tiền làm bể cá là ít nhất. Các bạn hãy tính xem, gia đình bạn An cần chi tối thiểu bao nhiêu tiền để làm bể cá nói trên? (kết quả làm tròn đến hàng nghìn)

- A. 520000 đồng. B. 1560000 đồng. C. 2520000 đồng. D. 1652000 đồng.

Lời giải

Gọi chiều rộng, chiều dài và chiều cao của bể cá lần lượt là $x, 2x, h$ ($x > 0, h > 0$)

Theo giả thiết bài ra thì $V = 2x^2h = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{2x^2}$

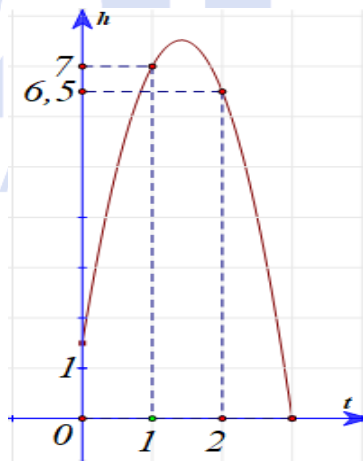
Chi phí làm bể là $f(x) = 2x^2 \cdot 500 + (2xh + 4xh) \cdot 250 = 500 \cdot (2x^2 + 3xh)$ (nghìn đồng)

Ta có: $f(x) = 500 \cdot \left(2x^2 + \frac{3}{2x}\right) \geq 500 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{2x^2 \cdot \frac{3}{4x} \cdot \frac{3}{4x}} = 1500 \sqrt[3]{\frac{9}{8}} \approx 1560$ (nghìn đồng)

Câu 6: Khi một quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt đến độ cao nào đó rồi rơi xuống. Biết rằng quỹ đạo của quả bóng là một phần của cung Parabol trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oth , trong đó t là thời gian (tính bằng giây) kể từ khi quả bóng được đá lên, h là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá lên từ độ cao $1,5m$. Sau đó 1 giây nó đạt được độ cao $7m$ và 2 giây sau khi đá lên nó đạt độ cao $6,5m$. Hỏi sau bao lâu thì quả bóng sẽ chạm đất kể từ khi đá lên?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 2.

Lời giải



Gọi hàm số bậc hai biểu thị độ cao $h(m)$ theo thời gian $t(s)$ là $h = f(t) = at^2 + bt + c$ ($a < 0$)

Theo giả thiết, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} f(0) = 1,5 \\ f(1) = 7 \\ f(2) = 6,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1,5 \\ a + b + c = 7 \\ 4a + 2b + c = 6,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = \frac{17}{2} \\ c = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow h = f(t) = -3t^2 + \frac{17}{2}t + \frac{3}{2}$$

Quả bóng chạm đất khi độ cao $h = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} t > 0 \\ -3t^2 + \frac{17}{2}t + \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 3$$

Vậy sau 3 giây kể từ khi đá lên quả bóng sẽ chạm đất

Câu 7: Một cửa hàng sách mua sách từ nhà xuất bản với giá 50 (nghìn đồng)/cuốn. Cửa hàng ước tính rằng, nếu bán 1 cuốn sách với giá là x (nghìn đồng) thì mỗi tháng khách hàng sẽ mua $(150 - x)$ cuốn sách. Hỏi cửa hàng bán 1 cuốn sách giá bao nhiêu (nghìn đồng) thì mỗi tháng sẽ thu được nhiều lãi nhất?

A. 100.

B. 80.

C. 120.

D. 150.

Lời giải

Gọi $T(x)$ là số tiền lãi của cửa hàng mỗi tháng

$$\text{Ta có } T(x) = (150 - x)(x - 50) = -x^2 + 200x - 7500.$$

Đồ thị $T(x)$ là một parabol có đỉnh $I(100; 2500)$

Do đó lợi nhuận cao nhất khi bán 1 cuốn sách với giá 100 (nghìn đồng).

Câu 8: Khi một vật từ vị trí y_0 được ném xiên lên cao theo góc α so với phương ngang với vận tốc ban đầu v_0 thì vật chuyển động theo phương trình $y = \frac{-gx^2}{2v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} + x \tan \alpha + y_0$. Một vận động viên

ném lao đã lập kỉ lục với độ xa 94m. Biết người này ném lao từ độ cao 0,9m và góc ném là khoảng 43° . Hỏi vận tốc đầu của lao khi được ném đi là bao nhiêu? (Lấy giá trị gia tốc trọng trường $g = 10 \text{ m/s}^2$ và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai)

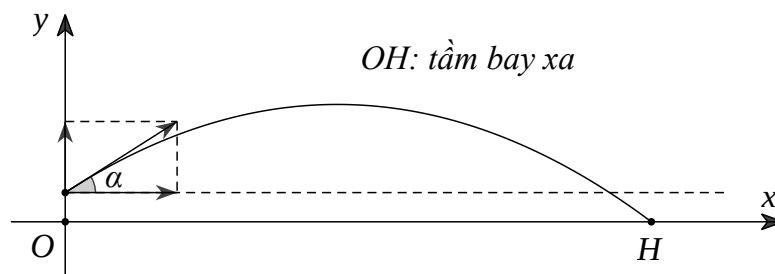
A. 29,54 m/s.

B. 29,85 m/s.

C. 30,54 m/s.

D. 30,87 m/s.

Hướng dẫn giải



Từ giả thiết ta có phương trình chuyển động của lao sau khi ném là:

$$y = \frac{-10x^2}{2v_0^2 \cdot \cos^2 43^\circ} + x \cdot \tan 43^\circ + 0,9$$

Mà lao được ném đạt độ xa 94m nên điểm $H(94; 0)$ thuộc đồ thị hàm số trên.

$$\text{Suy ra } 0 = \frac{-10.94^2}{2v_0^2 \cos^2 43^\circ} + 94 \cdot \tan 43^\circ + 0,9 \Rightarrow v_0^2 = \frac{-10.94^2}{2 \cos^2 43^\circ \cdot (-94 \cdot \tan 43^\circ - 0,9)}$$

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{-10.94^2}{2 \cos^2 43^\circ \cdot (-94 \cdot \tan 43^\circ - 0,9)}} \approx 30,54 \text{ m/s}.$$

Câu 9: Một trận bóng đá được tổ chức ở một sân vận động có sức chứa 15000 người. Với giá vé 14\$ thì trung bình các trận đấu gần đây có 9500 khán giả. Theo một khảo sát thị trường đã chỉ ra rằng cứ giá 1\$ mỗi vé thì trung bình số khán giả tăng lên 1000 người. Giá vé bằng bao nhiêu thì thu được nhiều lợi nhuận nhất (đơn vị \$)?

A. 18, 25.

B. 11, 75.

C. 15, 25.

D. 10, 5.

Lời giải

Ta thấy có hai đại lượng thay đổi là giá vé và số lượng khán giả.

Gọi x \$ là giá vé ($x > 0$).

<u>Giá vé</u>	x
<u>Số tiền giá vé được giảm xuống</u>	$14 - x$
<u>Số khán giả tăng lên</u>	$1000(14 - x)$
<u>Số khán giả</u>	$9500 + 1000(14 - x)$

Do lợi nhuận = giá vé x số khán giả nên nếu gọi lợi nhuận thu được là y thì

$$y = x(9500 + 1000(14 - x)) = -1000x^2 + 23500x$$

Do y là hàm số bậc hai nên nhận giá trị cực đại khi $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-23500}{-2000} = 11,75$.

Vậy giá vé bằng 11,75\$ thì thu được nhiều lợi nhuận nhất.

Câu 10: Anh Ba dự định trồng ít nhất một trong hai loại khoai lang và khoai mì trên trang trại có diện tích 20 hecta. Nếu trồng khoai lang thì mỗi hecta cần 40 tấn phân bón và lợi nhuận thu được khoảng 8 triệu đồng. Nếu trồng khoai mì (sắn) thì mỗi hecta cần 50 tấn phân bón và lợi nhuận thu được khoảng 10 triệu đồng. Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên với diện tích bao nhiêu để lợi nhuận thu được là cao nhất. Biết rằng tổng số phân bón trong kho mà anh Ba hiện có là 950 tấn.

A. 5 ha khoai lang và 15 ha khoai mì

B. 10 ha khoai lang và 10 ha khoai mì

C. 15 ha khoai lang và 5 ha khoai mì

D. 0 ha khoai lang và 20 ha khoai mì

Lời giải

Gọi diện tích trồng khoai lang là x (ha). Điều kiện: $0 \leq x \leq 20$. (1)

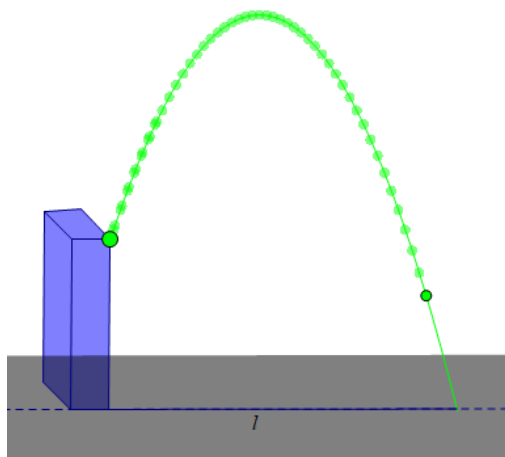
Suy ra diện tích trồng khoai mì là $20 - x$.

Khối lượng phân bón phải dùng $40x + 50(20 - x) = 1000 - 10x$.

Lượng phân bón trong kho là 950 tấn nên $1000 - 10x \leq 950 \Leftrightarrow x \geq 5$. (2)

Lợi nhuận thu được là $g(x) = 8x + 10(20 - x) = 200 - 2x$ (triệu đồng).

Câu 12: Ở một điểm cao trên tháp cách mặt đất 1,75 m nhà thiết kế có đặt một vòi phun nước tạo hình cầu vòng. Biết rằng đường đi của các giọt nước sau khi ra khỏi vòi có dạng đường cong parabol và chạm đất tại một vị trí cách chân tháp 3,5 m (tham khảo hình vẽ bên dưới). Người ta ước thấy tại một vị trí trên mặt đất cách tháp 1,5 m thì giọt nước ở vị trí cao nhất. Hỏi vị trí cao nhất của giọt nước cách mặt đất bao nhiêu mét?

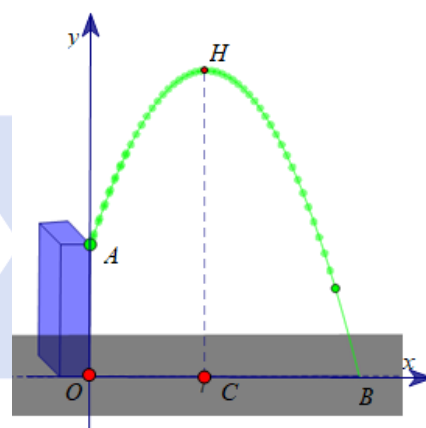


Lời giải

Đặt hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ bên với A là vị trí đặt vòi phun nước; B là vị trí nước tiếp đất, C là vị trí trên mặt đất mà giọt nước đạt vị trí cao nhất. Khi đó $A\left(0; \frac{7}{4}\right); B\left(\frac{7}{2}; 0\right); C\left(\frac{3}{2}; 0\right)$.

Gọi hàm số bậc hai có đồ thị thể hiện đường đi của giọt nước khi ra khỏi vòi phun nước là $y = ax^2 + bx + c$. Khi đó đồ thị hàm số đi qua hai điểm A, B và nhận đường thẳng

$x = \frac{3}{2}$ làm trục đối xứng. Do đó



$$\begin{cases} c = \frac{7}{4} \\ a \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{7}{2}\right) + c = 0 \\ -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{7}{4} \\ 49a + 14b + 7 = 0 \\ b = -3a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{7}{4} \\ a = -1 \\ b = 3 \end{cases} \text{ Do đó hàm số bậc hai là } y = -x^2 + 3x + \frac{7}{4}.$$

Gọi H là vị trí giọt nước cao nhất khi đó $CH = y_H = y_{x_C} = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) + \frac{7}{4} = 4$.

Vậy vị trí cao nhất của giọt nước cách mặt đất 4 mét.

The diagram shows a parabolic arch with a height of 6m and a width of 12m. The arch is supported by two vertical pillars. The distance from the center of the arch to the nearest pillar is 1m.

- D.** $33,6m$.

$$I(0;1) \Rightarrow \begin{cases} x_I = -\frac{b}{2a} = 0 \\ y_I = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow (P): y = ax^2 + 1$$

$$M(6;6) \in (P) \Rightarrow a.6^2 + 1 = 6 \Rightarrow a = \frac{5}{36} \Rightarrow (P): y = \frac{5}{36}x^2 + 1$$

9 | Ths. Lê Việt – THPT Thăng Long, Hà Nội – Phone: 0835221183 - Ôn thi cam kết điểm số

$$x_1 = 1,2 \Rightarrow y_1 = \frac{5}{36} \cdot 1,2^2 + 1 = 1,2$$

$$x_2 = 2,4 \Rightarrow y_2 = 1,8$$

$$x_3 = 3,6 \Rightarrow y_3 = 2,8$$

$$x_4 = 4,8 \Rightarrow y_4 = 4,2$$

$$x_5 = 1,2 \Rightarrow y_5 = 6$$

Tổng độ dài các dây cáp AB, CD, EF, GH, MN là $1,2 + 1,8 + 2,8 + 4,2 + 6 = 16m$

Tổng độ dài của các dây cáp của một bên cầu là $16.2 + 1 = 33m$

Tổng độ dài dây cáp bao gồm thêm 5% chiều dài mỗi sợi dây cáp để neo cố định là $33.(1+5\%) = 34,65m$

- Câu 14:** Anh An có một trang trại nuôi vịt thịt có diện tích $200m^2$, năm ngoái anh nuôi với mật độ 16 con vịt giống/ m^2 và thu được tổng khối lượng 3840kg vịt thịt thành phẩm. Theo khuyến cáo của Phòng Nông nghiệp huyện, để tăng năng suất thì anh phải giảm mật độ con giống/ m^2 , cụ thể khi giảm đi 1 con vịt giống/ m^2 thì mỗi con vịt thành phẩm sẽ có khối lượng tăng thêm 0,1kg. Hỏi năm nay anh An phải thả bao nhiêu con vịt giống cho trang trại của mình để tổng khối lượng đàn vịt thành phẩm của trang trại đạt cao nhất? (giả sử các điều kiện nuôi không thay đổi).
- A.** 2560 (con). **B.** 3080 (con). **C.** 2920 (con). **D.** 2800 (con).

Lời giải

Năm ngoái số con vịt giống mà anh An thả là: $200.16 = 3200$ (con). Do đó khối lượng mỗi con vịt thành phẩm là: $\frac{3840}{3200} = 1,2$ (kg).

Khi giảm 1 con vịt giống/ m^2 thì khối lượng mỗi con vịt thành phẩm tăng $0,1kg/1con$

Giả sử năm nay anh An cần giảm x con vịt giống/ m^2 để tổng khối lượng đàn vịt đạt cao nhất, khi đó khối lượng 1 con vịt thành phẩm là: $1,2 + 0,1x$ (kg)

Vậy tổng khối lượng đàn vịt thành phẩm khi đó là:

$$\begin{aligned} 200.(16-x).(1,2+0,1x) &= 20.(-x^2+4x+192) \\ &= 20.[196-(x-2)^2] \leq 20.196 = 3920(kg) \end{aligned}$$

Dấu '=' xảy ra khi $x = 2$. Vậy cần nuôi $16-2 = 14$ con vịt giống/ m^2 thì tổng khối lượng đàn vịt thành phẩm sẽ đạt lớn nhất bằng 3920kg.

Khi đó số con vịt giống năm nay anh An cần thả là: $200.14 = 2800$ con.

- Câu 15:** Một nhà trọ có giá 35 phòng và có giá thuê là 2500000 đồng trên mỗi phòng thì khách thuê luôn kín phòng. Qua khảo sát thị trường thì thấy rằng nếu cứ tăng 100000 đồng trên 1 phòng thì có 1 phòng trống. Hỏi số tiền trên mỗi phòng để lợi nhuận lớn nhất mà chủ nhà nhận được là bao nhiêu?

A. 3 triệu đồng.

B. 2,75 triệu đồng.

C. 3,2 triệu đồng.

D. 2,8 triệu đồng.

Lời giải

+) Gọi x (trăm nghìn) đồng là số tiền mà chủ nhà dự định tăng giá trên mỗi phòng.

Khi đó:

Lợi nhuận thu được trên mỗi phòng là $25 + x$ (trăm nghìn đồng).

Số lượng phòng sẽ cho thuê được trong một tháng sau khi tăng giá là $35 - x$.

+) Lợi nhuận mà chủ thu được trong một tháng là

$$f(x) = (35 - x)(25 + x) = 875 + 10x - x^2.$$

+) Xét hàm số $f(x) = 875 + 10x - x^2$ có đồ thị là 1 parabol có hoành độ đỉnh $x = 5$ mà hệ số $a = -1$ nên $\max f(x) = f(5) = 900$.

Vậy giá mới của phòng là 3 triệu đồng thì lợi nhuận thu được là cao nhất.

Câu 16: Một doanh nghiệp phân phối tủ lạnh cao cấp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh tủ lạnh Hitachi với chi phí mua vào một chiếc là 27 (triệu đồng) và bán ra với giá là 31 triệu đồng. Với giá bán này thì số lượng tủ lạnh mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng tủ lạnh này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc tủ thì số lượng tủ bán ra trong một năm là sẽ tăng thêm 200 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải định giá bán mới là bao nhiêu để sau khi đã thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất.

A. 30 triệu đồng.

B. 29 triệu đồng.

C. 30,5 triệu đồng.

D. 29,5 triệu đồng.

Lời giải

+) Gọi x (triệu) đồng là số tiền mà doanh nghiệp dự định giảm giá trên mỗi chiếc tủ lạnh; ($0 \leq x \leq 4$).

Khi đó:

Lợi nhuận thu được khi bán một chiếc tủ lạnh là $31 - x - 27 = 4 - x$ (triệu đồng).

Số lượng tủ lạnh mà doanh nghiệp sẽ bán được trong một năm sau khi giảm giá là $600 + 200x$ (chiếc).

+) Lợi nhuận mà doanh nghiệp thu được trong một năm là

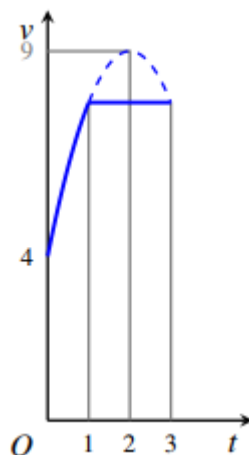
$$f(x) = (4 - x)(600 + 200x) = -200x^2 + 200x + 2400.$$

+) Xét hàm số $f(x) = -200x^2 + 200x + 2400$ trên đoạn $[0; 4]$ có đồ thị là 1 parabol có hoành độ đỉnh $x = \frac{1}{2} \in [0; 4] \Rightarrow f(0) = 2400, f\left(\frac{1}{2}\right) = 2450, f(4) = 0$

$$\text{Vậy } \max_{[0;4]} f(x) = 2450 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Vậy giá mới của chiếc tủ lạnh là 30,5 triệu đồng thì lợi nhuận thu được là cao nhất.

Câu 17: Một người chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị của hàm số vận tốc như hình dưới. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính vận tốc v của người đó tại thời điểm $t=3$.



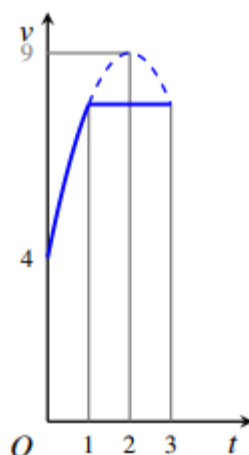
A. $v = \frac{121}{4}$.

B. $v = \frac{31}{4}$.

C. $v = \frac{89}{4}$.

D. $v = \frac{61}{4}$.

Lời giải



Giả sử $v(t) = at^2 + bt + c$ ($0 \leq t \leq 1$)

Ta có:

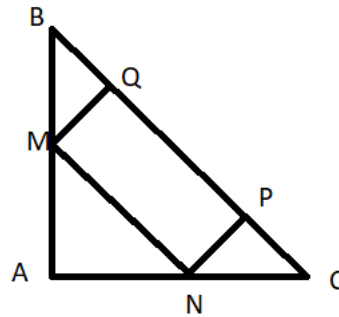
$$\begin{cases} v(0) = c = 4 \\ v(2) = 4a + 2b + c = 9 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b = 5 \\ 4a + b = 0 \\ c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{5}{4} \\ b = 5 \\ c = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v(t) = -\frac{5}{4}t^2 + 5t + 4, 0 \leq t \leq 1$$

$$\Rightarrow v(1) = \frac{31}{4}$$

$$\text{Ta có: } v(t) = \begin{cases} -\frac{5}{4}t^2 + 5t + 4, & 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{31}{4}, & 1 < t \leq 3 \end{cases} \Rightarrow v(3) = \frac{31}{4}.$$

Câu 18: Một người có mảnh vườn hình tam giác vuông cân ABC , $AB = BC = 100m$. Người đó dự định đào một cái ao hình chữ nhật $MNPQ$ như hình vẽ. Hỏi diện tích lớn nhất của cái ao là bao nhiêu?



A. $3000m^2$.

B. $5000m^2$.

C. $2500m^2$.

D. $4500m^2$.

Lời giải

+) Đặt $AN = x$ ($0 \leq x \leq 100$) (m).

Khi đó độ dài $NC = 100 - x$

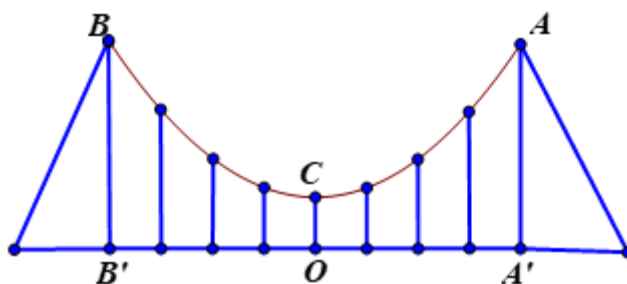
Tam giác PNC vuông cân ở P nên $NP = \frac{100 - x}{\sqrt{2}}$

+) Tam giác AMN vuông cân ở A nên $MN = x\sqrt{2}$.

+) Diện tích hình chữ nhật cần tìm là $MN \cdot NP = \frac{100 - x}{\sqrt{2}} \cdot x\sqrt{2} = 100x - x^2$

+) Xét hàm số $f(x) = -x^2 + 100x$ đồ thị là 1 parabol có hoành độ đỉnh $x = 50$ và có hệ số $a = -1$ nên $\max_{[0;100]} f(x) = f(50) = 2500m^2$.

Câu 19: Dây truyền đỡ nền cầu treo có dạng Parabol ACB như hình vẽ. Đầu cuối của dây được gắn chặt vào điểm A và B trên trục AA' và BB' với độ cao 30m. Chiều dài nhịp $A'B' = 200m$. Độ cao ngắn nhất của dây truyền trên nền cầu là $OC = 5m$. Xác định tổng các chiều dài các dây cáp treo (thanh thẳng đứng nối nền cầu với dây truyền)?



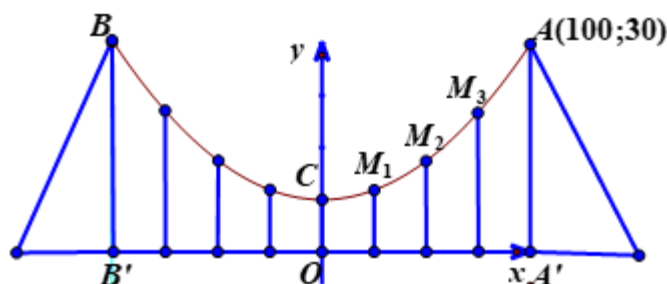
A. 34,875m.

B. 35,875m.

C. 36,875m.

D. 37,875m.

Lời giải



Chọn trục Oy trùng với trục đối xứng của Parabol, trục Ox nằm trên nền cầu như Hình vẽ. Khi đó ta có $A(100;30)$, $C(0;5)$, ta tìm phương trình của Parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c$. Parabol có đỉnh là C và đi qua A nên ta

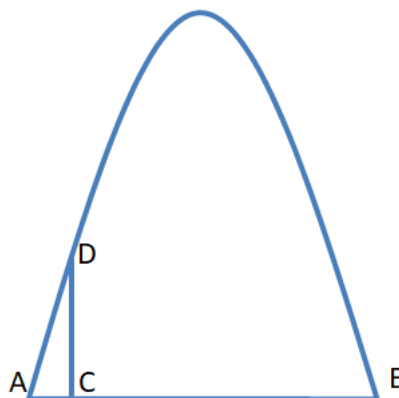
$$\text{có hệ phương trình: } \begin{cases} -\frac{b}{2a} = 0 \\ a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 5 \\ a \cdot 100^2 + b \cdot 100 + c = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{400} \\ b = 0 \\ c = 5 \end{cases}$$

Suy ra Parabol có phương trình $y = \frac{1}{400}x^2 + 5$. Bài toán đưa việc xác định chiều dài các dây cáp treo sẽ là tính tung độ những điểm M_1, M_2, M_3 của Parabol. Ta dễ dàng tính được tung độ các điểm có các hoành độ $x_1 = 25, x_2 = 50, x_3 = 75$ lần lượt là $y_1 = 6,5625(\text{m}), y_2 = 11,25(\text{m}), y_3 = 19,0625(\text{m})$.

Do đó tổng độ dài các dây cáp treo cần tính là

$$6,5625 + 11,25 + 19,0625 = 36,875(\text{m})$$

Câu 20: Trong một chương trình nghệ thuật, có một chiếc cổng hình Parabol được dựng như hình vẽ. Chiều rộng của cổng là $AB = 20\text{m}$. Đoạn $AC = 1\text{m}, CD = 3\text{m}$. Tính chiều cao của chiếc cổng này.



A. 30m.

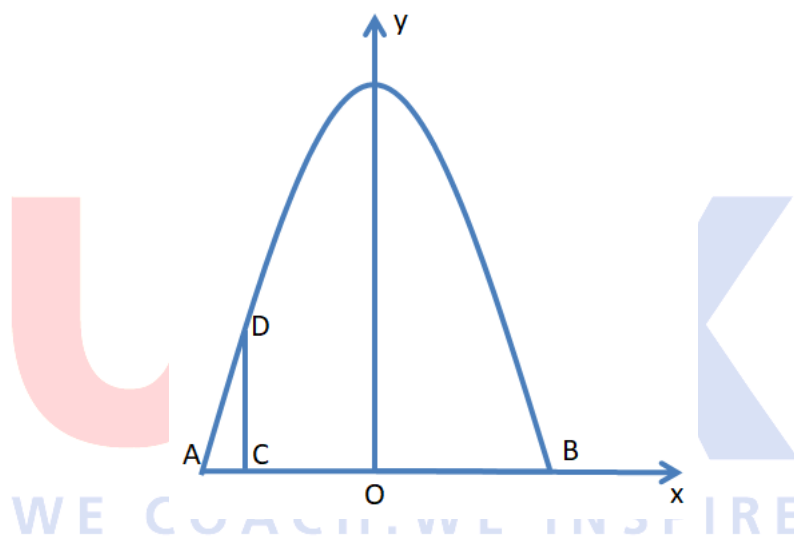
B. 35m.

C. $\frac{100}{3}m$.

D. $\frac{121}{3}m$

Lời giải

+)Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.



+)Theo bài ra ta có phương trình Parabol là $y = ax^2 + b$

Tọa độ các điểm $A(-10;0), C(-9;0), D(-9;3)$

+)Các điểm $A(-10;0), D(-9;3)$ thuộc Parabol nên ta có hệ
$$\begin{cases} 0 = 100a + b \\ 3 = 81a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{-1}{3} \\ b = \frac{100}{3} \end{cases}$$

Vậy chiều cao của cổng là $\frac{100}{3}m$.

Câu 21: Khi một quả bóng được đá lên nó sẽ đạt được độ cao nào đó rồi rơi xuống. Biết rằng quỹ đạo của quả bóng là một cung parabol. Giả thiết rằng bóng được đá từ độ cao 1m. Sau đó 1 giây nó đạt độ cao 8, 5m và 2 giây sau khi đá nó đạt độ cao 6m. Hỏi sau bao lâu quả bóng chạm đất (Tính chính xác đến hàng phần trăm).

A. 2,58s.

B. 2,59s.

C. 2,60s.

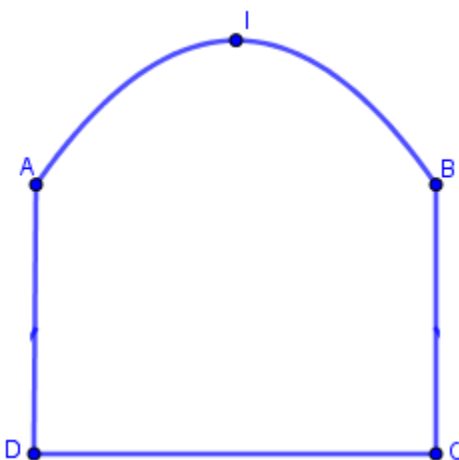
D. 2,57s.

Lời giải

A Cartesian coordinate system showing a downward-opening parabola. The x-axis is labeled from -4 to 6, and the y-axis is labeled from -1 to 9. The parabola has its vertex at point B(1, 8.5). It passes through point A(0, 1) and point C(2, 6). Dashed lines indicate the coordinates of these points: a vertical dashed line from B to 1 on the x-axis and a horizontal dashed line to 8.5 on the y-axis; a vertical dashed line from A to 0 on the x-axis and a horizontal dashed line to 1 on the y-axis; and a vertical dashed line from C to 2 on the x-axis and a horizontal dashed line to 6 on the y-axis.

$$\begin{cases} c=1 \\ a+b+c=8,5 \\ 4a+2b+c=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-5 \\ b=12,5 \\ c=1 \end{cases}$$
$$y = -5x^2 + 12,5x + 1$$
$$y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \approx -0,08(loi) \\ x \approx 2,58(tm) \end{cases}$$

Câu 22: Một chiếc cổng như hình vẽ, trong đó $CD = 6m$, $AD = 4m$, phía trên cổng có dạng hình parabol



16 | Ths. Lê Việt – THPT Thăng Long, Hà Nội – Phone: 0835221183 - Ôn thi cam kết điểm số

A. 6,13m.

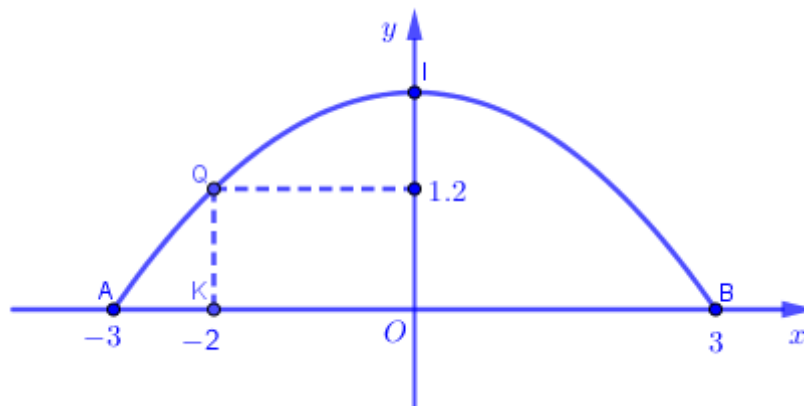
B. 6,14m.

C. 6,15m.

D. 6,16m.

Lời giải

+) Chọn hệ trục như hình vẽ đối với phần vòm công.



Gọi O là trung điểm của AB , K là điểm thuộc đoạn thẳng OA sao cho $OK = 2m$.

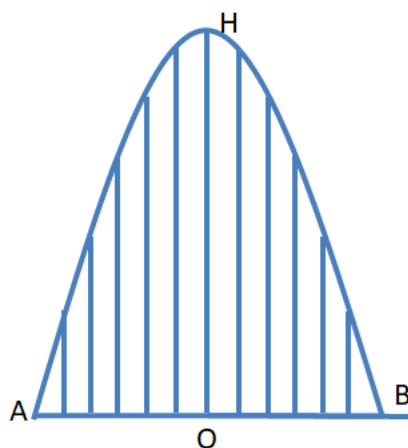
+) Khi đó phương trình của đường cong parabol có dạng $y = ax^2 + c$.

+) Theo giả thiết ta có parabol đi qua $(-2; 1,2), (-3; 0)$ nên ta có:

$$\begin{cases} 4a + c = 1,2 \\ 9a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{6}{25} \\ c = \frac{54}{25} = 2,16 \end{cases}$$

+) Vậy đỉnh I của parabol (theo mép dưới của cổng) cách mặt đất tối thiểu là 6,16m.

Câu 23: Một chiếc cổng của một hầm trú ẩn có hình dạng Parabol như hình vẽ, được bảo vệ bằng các thanh kim loại song song với trục của Parabol. Chiều rộng của cổng là $AB = 3,6m$, chiều cao của cổng là $OH = 3m$. Biết rằng chân trụ của các thanh kim loại cách đều nhau trên đoạn thẳng AB , giá thanh kim loại là 120USD/1m. Tính số tiền làm song thưa.



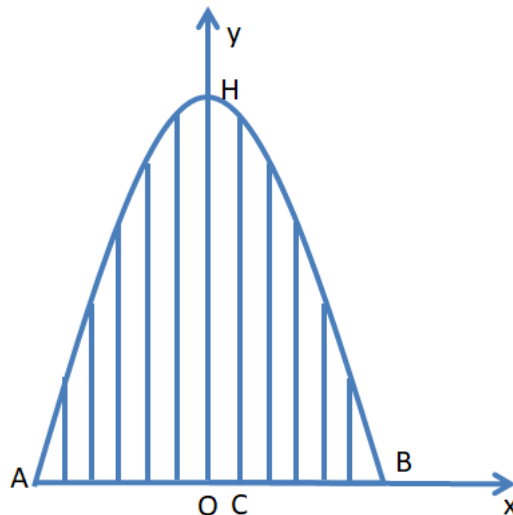
A. 2700USD.

B. 2500USD.

C. 3000USD.

D. 2860USD.

Lời giải



+)Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.

+)Theo bài ra ta có phương trình Parabol là $y = ax^2 + 3$

Tọa độ các điểm $A(-1,8;0), C(0,3;0)$

+)Các điểm $A(-1,8;0)$ thuộc Parabol nên ta có hệ $0 = a \cdot (1,8)^2 + 3 \Rightarrow a = \frac{-25}{27}$

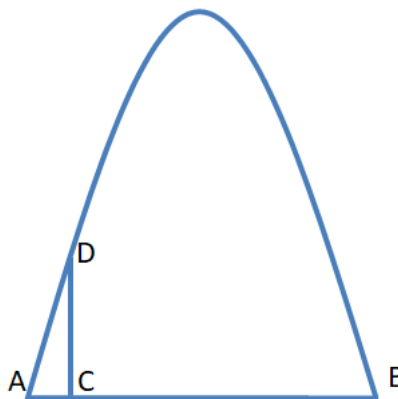
$$\Rightarrow y = \frac{-25}{27}x^2 + 3$$

+)Tổng chiều dài của các thanh kim loại là

$$2 \cdot \left(\frac{-25}{27}(0,3)^2 + 3 + \frac{-25}{27}(0,6)^2 + 3 + \frac{-25}{27}(0,9)^2 + 3 + \frac{-25}{27}(1,2)^2 + 3 + \frac{-25}{27}(1,5)^2 + 3 \right) + 3 = \frac{143}{6}m$$

Vậy số tiền để làm các thanh kim loại là $\frac{143}{6} \cdot 120 = 2860USD$.

Câu 24: Trong một chương trình nghệ thuật, có một chiếc cổng hình Parabol dựng như hình vẽ. Chiều rộng của cổng là $AB = 20m$. Đoạn $AC = 1m, CD = 3m$. Tính chiều cao của chiếc cổng này.



A. $30m$.

B. $35m$.

C. $\frac{100}{3}m$.

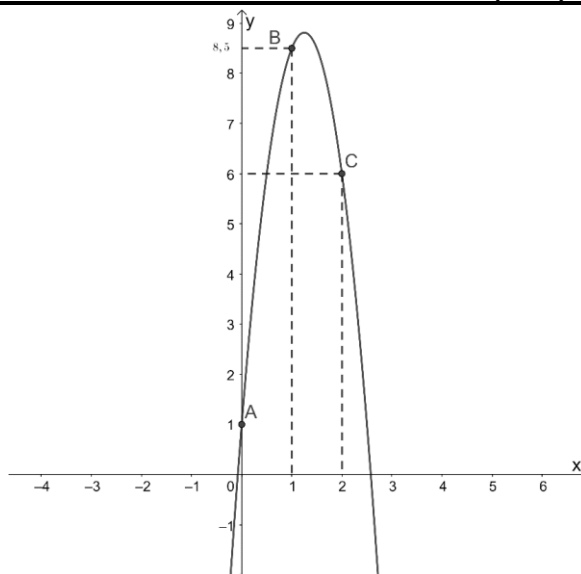
D. $\frac{121}{3}m$

Lời giải

A graph of a downward-opening parabola on a Cartesian coordinate system. The vertex is on the y-axis. The parabola intersects the x-axis at points A and B. A vertical line segment CD is drawn from point C on the x-axis to point D on the parabola. The origin is labeled O.

+) Các điểm $A(-10;0), D(-9;3)$ thuộc Parabol nên ta có hệ
$$\begin{cases} 0 = 100a + b \\ 3 = 81a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{-1}{3} \\ b = \frac{100}{3} \end{cases}$$

19 | Ths. Lê Việt – THPT Thăng Long, Hà Nội – Phone: 0835221183 - Ôn thi cam kết điểm số



+) Theo bài ra gán vào hệ tọa độ và sẽ tương ứng các điểm A, B, C. nên ta có

$$\begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = 8,5 \\ 4a + 2b + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 12,5 \\ c = 1 \end{cases}$$

Khi đó parabol có dạng

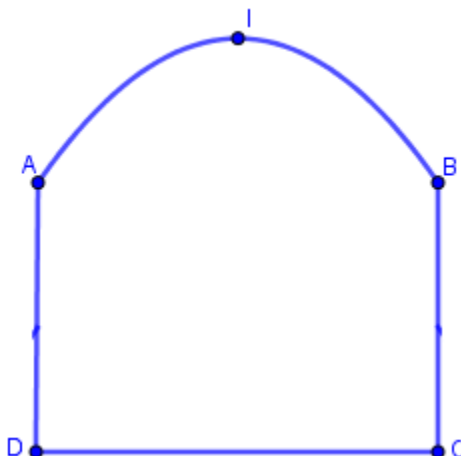
$$y = -5x^2 + 12,5x + 1$$

+) Để quả bóng rơi xuống đất thì

$$y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \approx -0,08(\text{loại}) \\ x \approx 2,58(\text{tm}) \end{cases}$$

Vậy $s = 2,58s$

Câu 26: Một chiếc cổng như hình vẽ, trong đó $CD = 6m$, $AD = 4m$, phía trên cổng có dạng hình parabol



Người ta cần thiết kế cổng sao cho những chiếc xe container chở hàng với bề ngang thùng xe là $4m$, chiều cao là $5,2m$ có thể đi qua được (chiều cao được tính từ mặt đường đến nóc thùng xe và thùng xe có dạng hình hộp chữ nhật). Hỏi đỉnh I của parabol (theo mép dưới của cổng) cách mặt đất tối thiểu là bao nhiêu?

A. 6,13m.

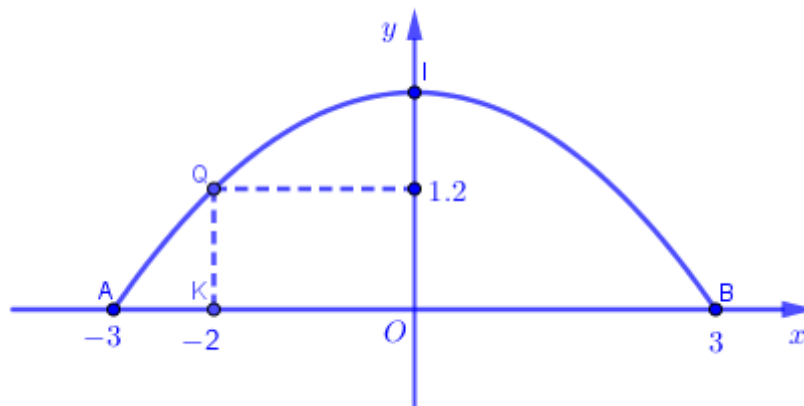
B. 6,14m.

C. 6,15m.

D. 6,16m.

Lời giải

+) Chọn hệ trục như hình vẽ đối với phần vòm cổng.



Gọi O là trung điểm của AB , K là điểm thuộc đoạn thẳng OA sao cho $OK = 2m$.

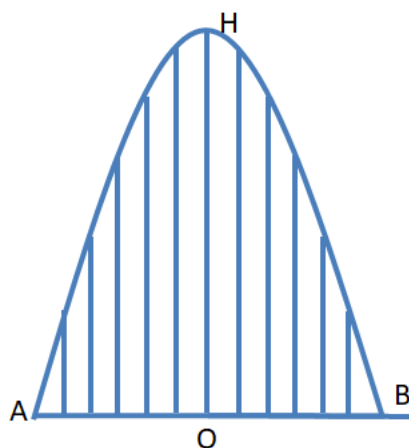
+) Khi đó phương trình của đường cong parabol có dạng $y = ax^2 + c$.

+) Theo giả thiết ta có parabol đi qua $(-2; 1,2), (-3; 0)$ nên ta có:

$$\begin{cases} 4a + c = 1,2 \\ 9a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{6}{25} \\ c = \frac{54}{25} = 2,16 \end{cases}$$

+) Vậy đỉnh I của parabol (theo mép dưới của cổng) cách mặt đất tối thiểu là 6,16m.

Câu 27: Một chiếc cổng của một hầm trú ẩn có hình dạng Parabol như hình vẽ, được bảo vệ bằng các thanh kim loại song song với trục của Parabol. Chiều rộng của cổng là $AB = 3,6m$, chiều cao của cổng là $OH = 3m$. Biết rằng chân trụ của các thanh kim loại cách đều nhau trên đoạn thẳng AB , giá thanh kim loại là 120USD/1m. Tính số tiền làm song thưa.



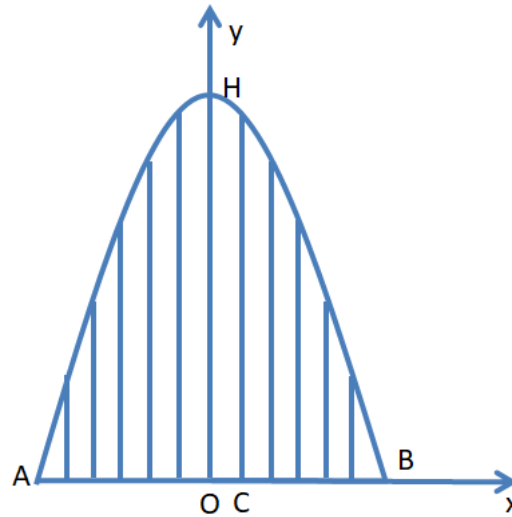
A. 2700USD.

B. 2500USD.

C. 3000USD.

D. 2860USD.

Lời giải



+)Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.

+)Theo bài ra ta có phương trình Parabol là $y = ax^2 + 3$

Tọa độ các điểm $A(-1,8;0), C(0,3;0)$

+)Các điểm $A(-1,8;0)$ thuộc Parabol nên ta có hệ $0 = a.(1,8)^2 + 3 \Rightarrow a = \frac{-25}{27}$

$$\Rightarrow y = \frac{-25}{27}x^2 + 3$$

+)Tổng chiều dài của các thanh kim loại là

$$2 \cdot \left(\frac{-25}{27}(0,3)^2 + 3 + \frac{-25}{27}(0,6)^2 + 3 + \frac{-25}{27}(0,9)^2 + 3 + \frac{-25}{27}(1,2)^2 + 3 + \frac{-25}{27}(1,5)^2 + 3 \right) + 3 = \frac{143}{6}m$$

Vậy số tiền để làm các thanh kim loại là $\frac{143}{6} \cdot 120 = 2860USD$.

Câu 28: Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe honda Future Fi với chi phí mua vào một chiếc là 27 triệu đồng và bán ra với giá 31 triệu đồng. Với giá bán này số lượng xe mà khách sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu là đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu cứ giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải định giá bán mới là bao nhiêu để sau khi thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất.

Lời giải

Gọi x (triệu đồng) là số tiền doanh nghiệp dự định giảm giá. $\Rightarrow 0 \leq x \leq 4$

Khi đó: + Lợi nhuận khi bán một chiếc xe là: $4 - x$

+ Số lượng xe bán được trong năm theo giá mới là: $600 + 200x$

YCBT thành: Tìm $0 \leq x \leq 4$ để $f(x) = (4 - x)(600 + 200x) = -200x^2 + 200x + 2400$ lớn nhất.

Suy ra: $f(x)$ đạt GTLN khi $x = \frac{1}{2}$.

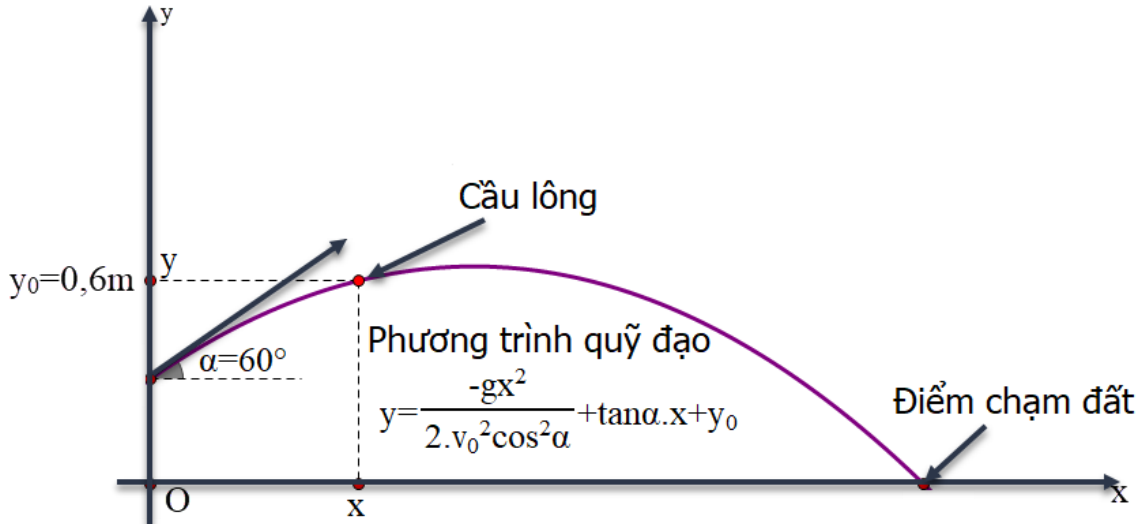
Câu 29: Mỗi buổi chiều thứ 5 hàng tuần, An và Bình tham gia CLB bóng rổ để thư giãn và rèn luyện. Trong trận đấu kỉ niệm ngày thành lập Đoàn, An thực hiện một đường chuyền bóng dài cho Bình, biết rằng quả bóng di chuyển theo một đường parabol như hình vẽ bên dưới. Giả sử trục Ox trùng với mặt đất, quả bóng rời tay An ở vị trí A và Bình bắt được bóng ở vị trí B , khi quả bóng di chuyển từ An đến Bình thì đi qua điểm C . Biết rằng $OA = BH = 1,8m$; $CK = 3,6m$; $OK = 2,5m$; $OH = 10m$. Xác định khoảng cách lớn nhất giữa quả bóng so với mặt đất khi An chuyền vào Bình.

The diagram shows a parabolic trajectory in a Cartesian coordinate system. The origin is labeled O . The horizontal axis is the x -axis, and the vertical axis is the y -axis. A dashed curve, labeled "Quỹ đạo parabol" (parabolic trajectory), starts at point A on the y -axis and ends at point B on the x -axis. Point C is on the curve. A horizontal dashed line segment OH is labeled $OH = 10\text{ m}$. A vertical dashed line segment CK is labeled $3,6\text{ m}$. A horizontal dashed line segment AK is labeled $1,8\text{ m}$. The x -axis is labeled "Mặt đất" (ground). Right angle symbols are shown at O , K , and H .

$$C(2,5;3,6) \in (P) \Leftrightarrow \frac{25}{4}a + \frac{5}{2}b + 1,8 = 3,6 \Leftrightarrow 25a + 10b = 7,2$$

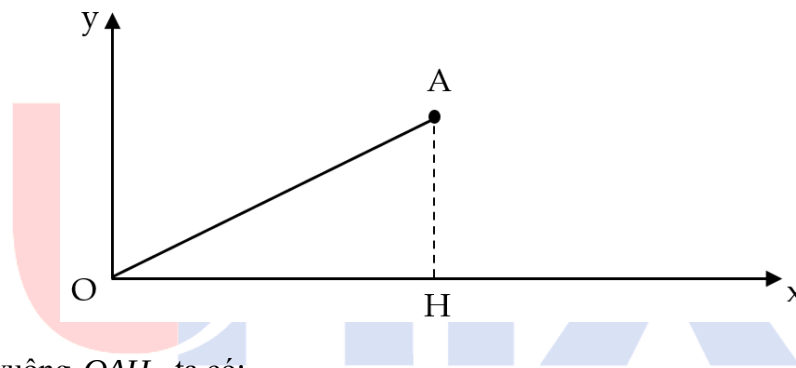
Câu 30: Trong buổi tập kỹ thuật phát cầu qua lưới của môn cầu lông. Người chơi phát cầu với góc $\alpha = 60^\circ$ so với mặt đất, độ cao của quả cầu khi rời khỏi mặt vợt là $y_0 = 0,6\text{m}$ so với mặt đất, vận tốc của quả cầu là $v_0 = 7\text{m/s}$ (bỏ qua sức cản của gió), người chơi đứng tại vị trí phát cầu cách mép trên của lưới 2m . Biết phương trình chuyển động của quả cầu khi rời khỏi mặt vợt cầu là $y = \left(\frac{-g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} x^2 \right) + (\tan \alpha)x + y_0$, với $(0; y_0)$ là điểm tại vị trí phát cầu, mép trên của lưới cầu

lông cách mặt đất $1,524m$ và $g = 9,8m/s^2$. Hỏi tại thời điểm quả cầu qua lưới thì cách mép trên của lưới bao nhiêu (tính giá trị gần đúng)?



Lời giải

+ Vị trí đứng phát cầu điểm O và vị trí mép trên của lưới là điểm A , ta có:



Xét tam giác vuông OAH , ta có:

$$+ OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{2^2 - (1,524)^2} = 1,295m$$

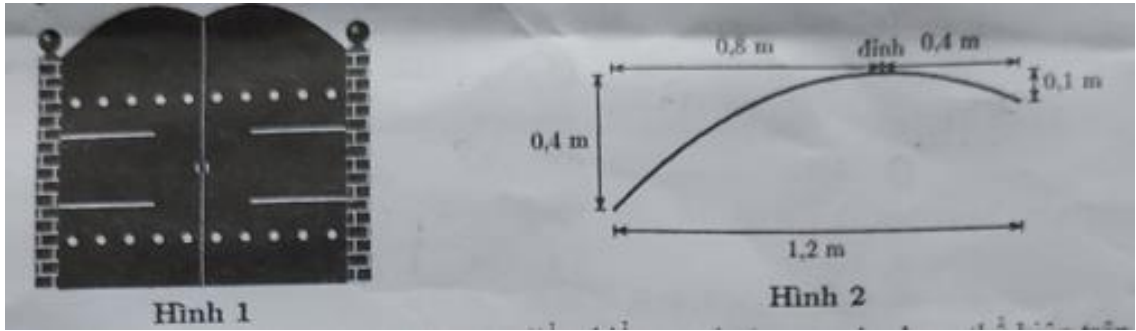
Khi quả cầu tới A thì

$$x = 1,295m \rightarrow y = \frac{-9,8}{2 \cdot 7^2 \cdot \cos^2 60^\circ} \cdot (1,295)^2 + (\tan 60^\circ) \cdot 1,295 + 0,6 = 2,172m.$$

Tại thời điểm quả cầu qua lưới thì sẽ cách mép trên của lưới: $2,172 - 1,524 = 0,648m$.

Câu 31: Mỗi buổi chiều thứ năm hàng tuần, An và Tuấn tham gia câu lạc bộ Bóng rổ trường THPT Diên Hồng để thư giãn và rèn luyện thân thể. Trong trận đấu kỷ niệm ngày thành lập Đoàn, An thực hiện một đường chuyền bóng dài cho Tuấn, Biết rằng quả bóng di chuyển theo một đường parabol như hình vẽ bên dưới. Giả sử rằng trục Ox trùng với mặt đất, quả bóng rời tay An ở vị trí A và Tuấn bắt được quả bóng ở vị trí B , khi quả bóng di chuyển từ An đến Tuấn thì đi qua điểm C . Biết rằng $OA = BH = 1,8m$; $CK = 3,6m$; $OK = 2,5m$; $OH = 10m$. Xác định khoảng cách lớn nhất của quả bóng so với mặt đất khi An chuyền cho Tuấn.





Lời giải

Ta gọi hàm số cần tìm là: $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) (1)

Đồ thị hàm số có đỉnh là điểm $O(0;0)$ nên ta thay điểm vào (1): $0 = a.0^2 + b.0 + c \Leftrightarrow c = 0$

Bên tay trái: ta thấy điểm ngọn có tọa độ $(-0,8; -0,4)$ nên ta thay vào (1)

Ta được pt: $a.(-0,8)^2 + b.(-0,8) = -0,4$

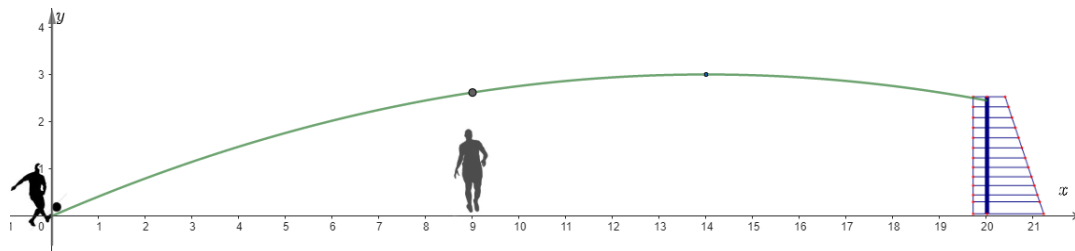
Bên tay phải: ta thấy điểm ngọn có tọa độ $(0,4;-0,1)$ nên ta thay vào (1)

Ta được pt: $a.(0,4)^2 + b.(0,4) = -0,1$

$$\text{Giải hpt: } \begin{cases} a.(-0,8)^2 + b.(-0,8) = -0,4 \\ a.(0,4)^2 + b.(0,4) = -0,1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-5}{8} \\ b = 0 \end{cases}$$

Vậy hàm số cần tìm là: $y = \frac{-5}{8}x^2$

Câu 35: Trong trận chung kết WC2022, L.Messi đã có cơ hội thực hiện cú sút phạt trực tiếp trước khung thành đội Pháp. Các cầu thủ Pháp lập thành hàng rào chắn cách điểm đá phạt 9m và cầu thủ cao nhất trong hàng rào là 2m. Giả định rằng quỹ đạo quả bóng sau khi Messi thực hiện cú sút là một Parabol (như hình vẽ) và nó đạt được chiều cao cực đại là 3m sau khi rời chân Messi 14m. Hỏi cú đá phạt này của Messi có đưa bóng đi qua điểm cao nhất của hàng rào hay không? Tại sao?



Lời giải

Gọi parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

(P) đi qua $(0;0), (14;3)$ và có trục đối xứng $x = 14$. Ta có hệ phương trình.

$$\begin{cases} c = 0 \\ 196a + 14b + c = 3 \\ -28a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{196} \\ b = \frac{3}{7} \\ c = 0 \end{cases}$$

Do đó $(P): y = -\frac{3}{196}x^2 + \frac{3}{7}x$.

Chiều cao của quả bóng khi cách Messi 9m là

$$y = \frac{-3}{196} \cdot 9^2 + \frac{3}{7} \cdot 9 = \frac{513}{196}.$$

Do quả bóng đạt được chiều cao lớn hơn 2m $\left(\frac{513}{196} > 2\right)$ nên Messi đưa bóng đi qua điểm cao nhất của hàng rào.

Câu 36: Bác Bảy có một cái ao diện tích 100m^2 . Để nuôi cá và vù vừa qua bác nuôi 20 con / m^2 . Thì thu được 2 tấn cá thành phẩm. theo cứ nghiệm nuôi của mình, bác Bảy thấy nếu cứ thả giảm đi 8 con/ m^2 thì mỗi con cá thành phẩm tăng 0,5 kg. Hỏi vù tới Bác cần thả bao nhiêu cá giống để đạt năng suất cao nhất? (giả sử không có hao hụt trong quá trình nuôi)

Lời giải

Số con cá bác Bảy đã nuôi trong vù vừa qua là: $100 \cdot 20 = 2000$ con

-Năng suất đã đạt trong vù vừa qua là: $\frac{2000}{2000} = 1 \text{ kg} / \text{con}$

Gọi x là số con cá mà bác Bảy đã thả giảm đi

$\Rightarrow$ Năng suất tăng thêm là: $\frac{0,5 \cdot x}{8} = 0,0625 \text{ kg} / \text{con}$

Vậy sản lượng thu được trong vù tới của bác Bảy là: $f(x) = (2000 - x)(1 + 0,0625x)$

$$\Leftrightarrow f(x) = -0,0625x^2 + 124x + 2000$$

Để đạt năng suất cao nhất thì sản lượng thu được cao nhất $\Leftrightarrow f(x)_{\max} = 63504$ khi $x = 992$

Vậy số con cá giống cần thả là: $2000 - 992 = 1008$ con

Câu 37: Một quả bóng được đá lên, nó sẽ bay theo quỹ đạo của một cung parabol trong mặt phẳng tọa độ Oth như hình bên trong đó t là thời gian kể từ khi quả bóng được đá lên (tính bằng giây), h là độ cao (tính bằng m) của quả bóng. Giả sử quả bóng đá lên từ độ cao 1,1m. sau 1 giây nó đạt độ cao 8,6 m. sau 2 giây đạt độ cao 6m. Hỏi độ cao lớn nhất mà quả bóng đạt được là bao nhiêu? (làm tròn đến hàng phần chục).

Lời giải

Gọi $f(t) = at^2 + bt + c$ ($a \neq 0$) là hàm số có đồ thị trùng với quỹ đạo của quả bóng.

Theo đề bài, ta có:

$$\begin{cases} f(0) = 1,1 \\ f(1) = 8,6 \\ f(2) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1,1 \\ a + b + c = 8,6 \\ 4a + 2b + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5,05 \\ b = 12,55 \\ c = 1,1 \end{cases}$$

Vậy $f(t) = -5,05t^2 + 12,55t + 1,1$

Quả bóng đạt độ cao lớn nhất khi:

$$t = \frac{-b}{2a} = \frac{251}{202} (s) \Rightarrow f(t) = -5,05t^2 + 12,55t + 1,1 \approx 8,9 (m)$$

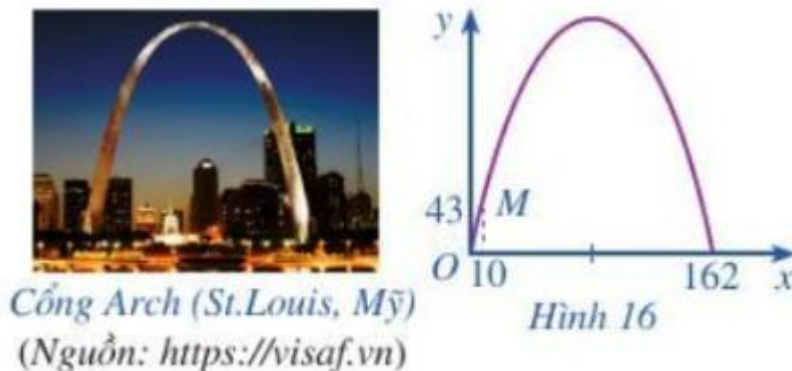
Câu 38: Tại một buổi khai trương, người ta làm một cổng chào có đường viền trong của mặt cắt là đường parabol. Người ta đo khoảng cách giữa hai chân cổng là $4,5m$. Từ một điểm trên thân cổng người ta đo được khoảng cách tới mặt đất (điểm H) là $1,8m$ và khoảng cách từ điểm H tới chân cổng gần nhất là $1m$. Hãy tính chiều cao của cổng chào đó (tính theo đường viền trong) theo đơn vị mét và làm tròn kết quả đến hàng phần mười.



Chọn hệ trục tọa độ sao cho gốc tọa độ O trùng một chân của cổng, trục hoành nằm trên đường nối hai chân cổng (đơn vị trên các trục tính theo mét) (Hình 10). Gọi hàm số bậc hai có đồ thị chứa đường viền trong của cổng chào trên là $y = ax^2 + bx + c$.

$$\begin{cases} 4,5^2 a + 4,5b = 0 \\ 1^2 a + 1b = 1,8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-18}{35} \\ b = \frac{81}{35} \end{cases}$$
 Suy ra ta có hàm số: $y = \frac{-18}{35}x^2 + \frac{81}{35}x$. Từ đó, đỉnh của đồ thị

Câu 39: Khi du lịch đến thành phố St. Louis (Mỹ), ta sẽ thấy một cái cổng lớn có hình parabol hướng bề lõm xuống dưới, đó là cổng Arch. Giả sử ta lập một hệ tọa độ Oxy sao cho một chân cổng đi qua gốc O như Hình 16 (x và y tính bằng mét), chân kia của cổng ở vị trí có tọa độ $(162; 0)$. Biết một điểm M trên cổng có tọa độ là $(10; 43)$.



Tính chiều cao của cổng (tính từ điểm cao nhất trên cổng xuống mặt đất), làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.

Lời giải

Từ đồ thị ta thấy các điểm thuộc đồ thị là:

$$A(0;0), B(10;43), C(162;0).$$

Gọi hàm số là $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$

Thay tọa độ các điểm A, B, C vào ta được hệ:

$$\begin{cases} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0 \\ a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c = 43 \\ a \cdot 162^2 + b \cdot 162 + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 100a + 10b = 43 \\ 162^2 a + 162b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = -\frac{43}{1520} \\ b = \frac{3483}{760} \end{cases}$$

Từ đó ta có $y = -\frac{43}{1520}x^2 + \frac{3483}{760}x$

Hoành độ đỉnh của đồ thị là: $x = -\frac{b}{2a} = 81$

Khi đó: $y = -\frac{43}{1520} \cdot 81^2 + \frac{3483}{760} \cdot 81 \approx 186(m)$

Vậy chiều cao của cổng là 186m.

Câu 40: Hai bạn An và Bình trao đổi với nhau:

An nói: Tổ đọc ở một tài liệu thấy nói rằng cổng Trường Đại học Bách khoa Hà Nội có dạng một parabol, khoảng cách giữa hai chân cổng là 8m và chiều cao của cổng tính từ một điểm trên mặt đất cách chân cổng là 0,5m là 2,93m. Từ đó tổ tính ra được chiều cao của cổng parabol đó là 12m.



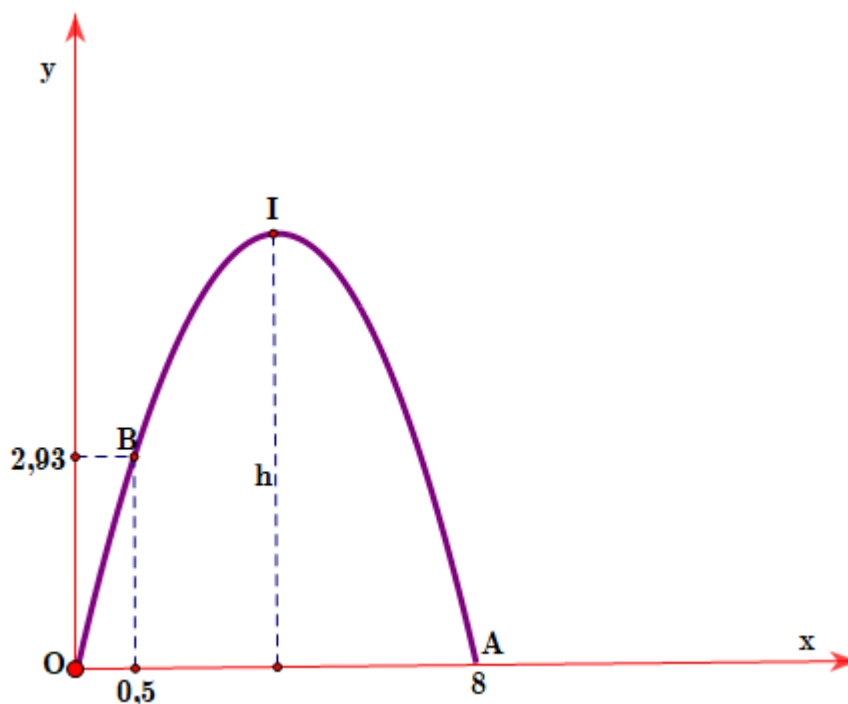
Hình 6.14. Cổng parabol của trường Đại học Bách khoa Hà Nội

Sau một hồi suy nghĩ, Bình nói: Nếu dữ kiện như bạn nói, thì chiều cao của cổng parabol mà bạn tính ra ở trên là không chính xác.

Dựa vào thông tin mà An đọc được, em hãy tính chiều cao của cổng Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội để xem kết quả bạn An tính được có chính xác không nhé.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho một chân cổng đặt tại gốc tọa độ, chân còn lại đặt trên tia Ox. Khi đó cổng parabol là một phần của đồ thị hàm số dạng $y = ax^2 + bx$ (do parabol đi qua gốc tọa độ nên hệ số tự do bằng 0).



Parabol đi qua các điểm có tọa độ $A(8;0)$ và $B(0,5;2,93)$.

Thay tọa độ của A, B vào hàm số ta có:

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 8^2 + b \cdot 8 \\ 2,93 = a \cdot 0,5^2 + b \cdot 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-293}{375} \\ b = \frac{2344}{375} \end{cases}$$

Suy ra có hàm số $y = \frac{-293}{375}x^2 + \frac{2344}{375}x$

Hàm số có đỉnh $I\left(4; \frac{4688}{375}\right)$

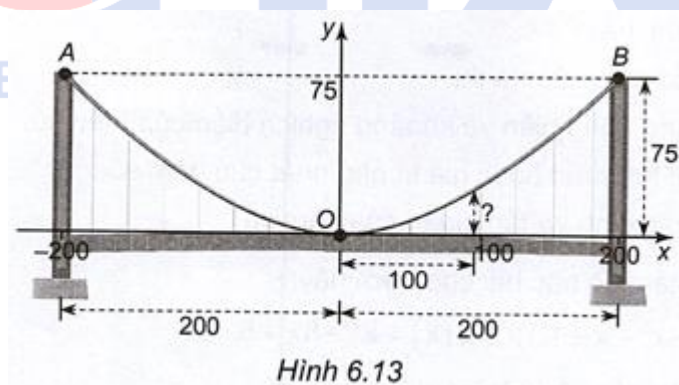
Suy ra chiều cao của cổng là $\frac{4688}{375} \approx 12,5m$.

Kết quả của An gần chính xác.

Câu 41: Một cây cầu treo có trọng lượng phân bố đều dọc theo chiều dài của nó. Cây cầu có trụ tháp đôi cao $75m$ so với mặt của cây cầu và cách nhau $400m$. Các dây cáp có hình dạng đường parabol và được treo trên các đỉnh tháp. Các dây cáp chạm mặt cầu ở tâm của cây cầu. Tìm chiều cao của dây cáp tại điểm cách tâm của cây cầu $100m$ (giả sử mặt của cây cầu là bằng phẳng).

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như Hình 6.13: Trục Ox dọc theo mặt của cây cầu, trục Oy vuông góc với trục Ox tại tâm của cây cầu. Khi đó các dây cáp có hình dạng đường parabol có bề lõm hướng lên trên và đỉnh của parabol là gốc $O(0;0)$. Vì thế ta giả sử công thức của parabol là $y = ax^2, a > 0$.



Theo giả thiết, cây cầu có trụ tháp đôi cao $75m$ so với mặt của cây cầu và cách nhau $400m$ nên ta có các điểm $A(-200;75)$ và $B(200;75)$ thuộc parabol. Khi đó ta có:

$$75 = a \cdot 200^2 \Rightarrow a = \frac{3}{1600}.$$

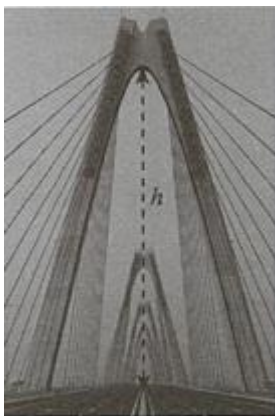
Do đó, phương trình của parabol là: $y = \frac{3}{1600}x^2$.

Với $x=100$ ta có $y = \frac{3}{1600} \cdot 100^2 = 18,75$.

Vậy chiều cao của dây cáp tại điểm cách tâm của cây cầu 100 m là 18,75 m.

Câu 42: Cầu Nhật Tân bắc qua sông Hồng được xem là chiếc cầu dây văng dài nhất Việt. Cầu có 5 trụ tháp chính kết nối các nhịp dây văng nâng đỡ toàn bộ phần chính của cây cầu, cũng là để tượng trưng cho 5 cửa ô cổ kính của Hà Nội. Mỗi trụ tháp được kiến trúc tạo dáng mỹ thuật phía trong bằng đường cong tựa như một parabol.

a) Giả sử rằng mặt trong của trụ cầu là một parabol như Hình 7. Khi không thể đo trực tiếp khoảng cách từ đỉnh vòm phía trong của trụ cầu tới mặt đường, làm thế nào để ước tính độ cao này?



Hình 7. Cầu Nhật Tân

b) Giả sử biết độ rộng của mặt đường khoảng 43m. Một người đã dùng dây dọi (không giãn) gắn lên thành trụ cầu ở vị trí B và điều chỉnh độ dài dây dọi để quả nặng vừa chạm đất (khi lặng gió), sau đó đo được chiều dài đoạn dây dọi sử dụng là 1,87m và khoảng cách từ chân trụ cầu đến quả nặng là 20cm. Nếu dùng dữ liệu tự thu thập được và tính toán theo cách ở trên thì người này sẽ ước tính được độ cao từ đỉnh vòm phía trong một trụ của cầu Nhật Tân tới mặt đường là bao nhiêu?



Hình 8

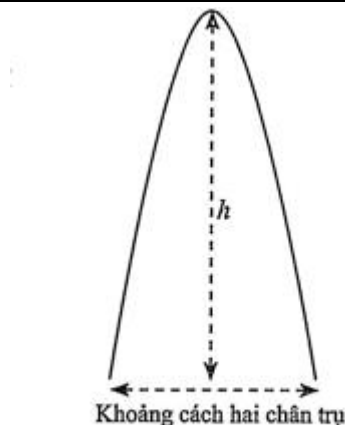
Lời giải

a) Vấn đề đặt ra trong thực tiễn là *không đo trực tiếp* khoảng cách từ đỉnh vòm phía trong của trụ cầu tới mặt đường nhưng cần ước tính độ cao này.

Để giải quyết vấn đề thực tiễn này bằng toán học, ta dùng đồ thị hàm số bậc hai để mô phỏng cho đường biên mặt trong của trụ cầu. Từ công thức của hàm số tìm được ứng với đồ thị, ta tính độ cao cần tìm.

Bước 1. Lựa chọn mô hình toán học

Dùng đồ thị hàm số bậc hai mô phỏng cho đường biên mặt trong của trụ cầu như Hình 9a.



Hình 9a. Parabol mô phỏng đường biên phía trong của trụ cầu

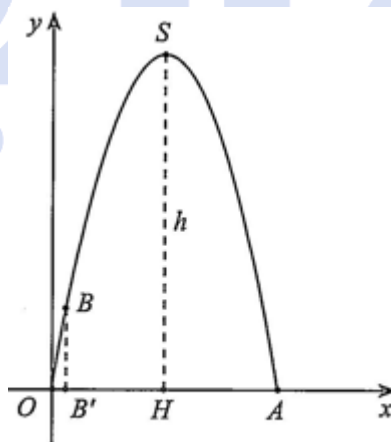
Bước 2. Phát biểu bài toán

- Trong hệ trục tọa độ Oxy (được chọn như Hình 9b), tung độ đỉnh S của parabol là bao nhiêu?

Bước 3. Giải quyết bài toán toán học

Trước hết, ta tìm công thức hàm số, bằng cách:

- Đo khoảng cách OA giữa hai chân trụ của cầu, từ đó xác định tọa độ điểm A, H (với H là trung điểm của OA).
- Chọn một điểm B cụ thể trên thành trụ cầu, xác định hình chiếu B' trên mặt đường rồi đo BB' và OB' . Từ đây, xác định tọa độ điểm B .



Hình 9b. Chọn hệ trục tọa độ Oxy

- Tìm hàm số bậc hai có công thức tổng quát: $y = ax^2 + bx + c$ biết đồ thị hàm số này qua gốc tọa độ và hai điểm A, B .
- Sau cùng tính tung độ đỉnh S .

Bước 4. Trả lời kết quả cho vấn đề thực tế

Ước lượng kết quả độ cao từ đỉnh vòm phía trong của trụ cầu tới mặt đường (có thể làm tròn tung độ đỉnh S đến đơn vị mét).

b) Chọn hệ trục tọa độ như Bước 2 ở câu a.

Đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$ nên $c = 0$. Suy ra công thức hàm số là $ax^2 + bx$.

Mặt khác đồ thị hàm số qua 2 điểm $A(43;0), B(0,2;1,87)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a \cdot (0,2)^2 + b \cdot 0,2 = 1,87 \\ a \cdot 43^2 + b \cdot 43 = 0 \end{cases}$$

Suy ra $a = -\frac{187}{856}; b = \frac{8041}{856}$ nên có hàm số $y = -\frac{187}{856}x^2 + \frac{8041}{856}x$.

Hình chiếu của đỉnh S trên trục hoành là H nên

$$y_S = f(x_S) = f(x_H) = f\left(\frac{x_A}{2}\right) = f\left(\frac{43}{2}\right) \approx 100,98.$$

Vậy độ cao từ đỉnh vòm phía trong một trụ của cầu Nhật Tân tới mặt đường là khoảng 101m.

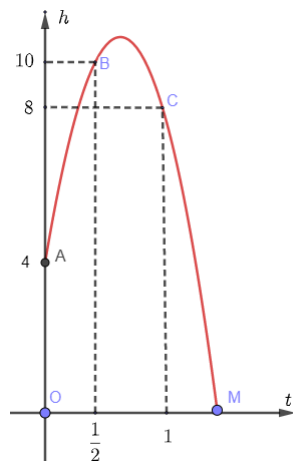
(Lưu ý: Kết quả này là giả định theo số liệu do người này tự thu thập, không ảnh hưởng đến độ cao thật trong thực tế).

Câu 43: Một vận động viên bóng chuyền đánh một quả bóng lên với vị trí ban đầu từ độ cao 4 ft (tính từ tay đánh bóng đến mặt đất). Tại thời điểm 0,5s trái bóng ở độ cao 10ft và tại 1s thì trái bóng ở độ cao 8ft



- Viết công thức tính độ cao quả bóng tính theo thời gian $t(s)$ sau khi được đánh ra, biết công thức tính $h(t)$ là một hàm số bậc 2
- Độ cao lớn nhất quả bóng đạt được là bao nhiêu?
- Đối phương có bao nhiêu giây để chạy đến cứu quả bóng trước khi nó chạm đến mặt đất?

Lời giải



- Vị trí ban đầu là từ độ cao 4 ft nên $A(0;4) \in (P) \Leftrightarrow c = 4$ (1)

- Tại thời điểm 0,5s trái bóng ở độ cao 10ft nên $B\left(\frac{1}{2}; 10\right) \in (P) \Leftrightarrow \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c = 10$ (2)

- Tại 1s thì trái bóng ở độ cao 8ft nên $C(1;8) \in (P) \Leftrightarrow a+b+c=8$ (3)

• Từ (1),(2),(3) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} c = 4 \\ \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c = 10 \\ a + b + c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -16 \\ b = 20 \\ c = 4 \end{cases}$$

- Vậy $h(t) = -16t^2 + 20t + 4$

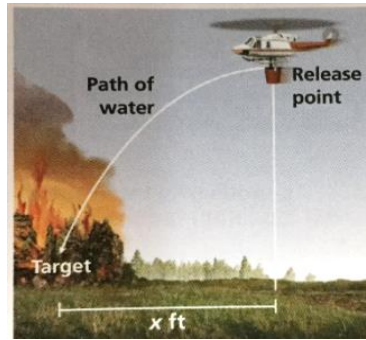
b) Ta có: $h(t) = -16\left(t^2 - \frac{5}{4}t\right) + 4 = -16\left(t - \frac{5}{8}\right)^2 + \frac{41}{4} \leq \frac{41}{4}$

- Vậy độ cao nhất của quả bóng đạt được là $\frac{41}{4}$ tại $t = \frac{5}{8}$

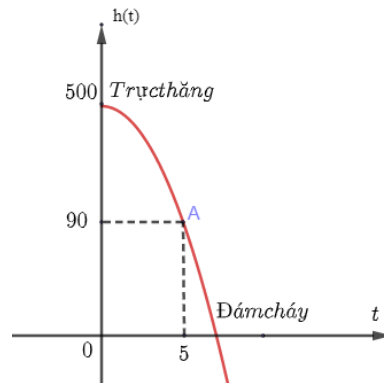
c) Khi quả bóng chạm đất thì $h(t) = 0 \Leftrightarrow -16t^2 + 20t + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{5 + \sqrt{41}}{8} \approx 1,43s \\ t = \frac{5 - \sqrt{41}}{8} (L) \end{cases}$

- Vây đối phương có 1,43s để cứu bóng trước khi bóng chạm đất

36 | Ths. Lê Việt – THPT Thăng Long, Hà Nội – Phone: 0835221183 - Ôn thi cam kết điểm số



Lời giải



• Chọn hệ trục Oth như hình vẽ với góc tọa độ O là vị trí trên mặt đất thẳng đứng với trục thẳng

• Gọi $(P): h(t) = at^2 + bt + c$.

• Ta có: hàm số bậc 2 này có đỉnh $I(0; 500)$ và qua $A(5; 90)$

• Khi đó: $\Leftrightarrow \begin{cases} I(0; 500) \in (P) \\ -\frac{b}{2a} = 0 \\ A(5; 90) \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 500 \\ -\frac{b}{2a} = 0 \\ 25a + 5b + c = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{82}{5} \\ b = 0 \\ c = 500 \end{cases}$

Vậy $h(t) = -\frac{82}{5}t^2 + 500$

• Khi nước chạm đất thì $h(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{82}{5}t^2 + 500 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{25\sqrt{82}}{41} \approx 5,52s \\ t = -\frac{25\sqrt{82}}{41} (L) \end{cases}$

Vậy khoảng cách theo phương ngang từ đám cháy đến máy bay là $x = 85.t \approx 469,2$ (ft)

Câu 45: Sức mạnh động cơ (tính bằng đơn vị mã lực) sinh ra từ máy của một canô ở tốc độ quay r vòng/phút được xác định bởi hàm số: $p(r) = -0.000025r^2 + 0.2r - 240$. Vậy sức mạnh lớn nhất của động cơ này đạt được là bao nhiêu? Khi đó, động cơ phải quay bao nhiêu vòng/phút?



Ta có: $p(r) = -0.000025r^2 + 0.2r - 240$ là hàm số bậc 2

- TXĐ: $D = R$
- Định $I(4000;160)$
- BBT

r	$-\infty$	4000	$+\infty$
$p(r)$	$-\infty$	160	$-\infty$

Câu 46: Khi một quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt đến độ cao nào đó rồi rơi xuống. Biết rằng quỹ đạo của quả bóng là một cung parabol trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, trong đó x là thời gian (tính bằng giây), kể từ khi quả bóng được đá lên; y là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá từ một nóc nhà cao 3m. Sau đó 1 giây, quả bóng đạt độ cao 6m và 3 giây sau khi đá lên, nó ở độ cao bằng với độ cao từ vị trí xuất phát (xem hình).

- Hãy tìm hàm số bậc hai biểu thị độ cao y theo thời gian x và có phần đồ thị trùng với quỹ đạo của quả bóng trong tình huống trên.
- Xác định độ cao lớn nhất của quả bóng (tính chính xác đến hàng phần nghìn).
- Sau bao lâu thì quả bóng sẽ chạm đất kể từ khi đá lên (tính chính xác đến hàng phần trăm)?

- a) Chọn góc tọa độ O dưới mặt đất theo phương thẳng đứng so với vị trí của người đá banh
- Vị trí của người đá banh là A và trái banh tiếp đất ở vị trí B

- Giả sử $y = f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$.
- Quả bóng được đá lên từ độ cao 3m, nên: $f(0) = c = 3$
- Sau đó 1 giây nó đạt độ cao 6m nên: $f(1) = a + b + c = 6$
- Sau khi đá 4 giây, quả bóng ở độ cao 3m, nghĩa là: $f(4) = 16a + 4b + c = 3$
- Từ đó ta có hệ phương trình bậc nhất:
$$\begin{cases} c = 3 \\ a + b + c = 6 \\ 16a + 4b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 3 \end{cases}$$

Vậy, hàm số cần tìm là: $y = f(x) = -x^2 + 4x + 3$

b) Độ cao lớn nhất của quả bóng chính là tung độ của đỉnh parabol, cụ thể: $y = -\frac{\Delta}{4a} = 7m$.

c) Để quả bóng chạm đất thì cao độ bằng 0

$$\Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{7} \approx -0,65 \\ x = 2 + \sqrt{7} \approx 4,65 \end{cases}$$

Như vậy, quả bóng chạm đất sau gần 4,65 giây.

Câu 47: Cánh cổng của gia đình bạn An như hình vẽ. Bạn An muốn đo chiều cao của cái cổng, biết rằng bạn An chỉ được nhà sản xuất công bố một vài dữ liệu: Chiều rộng của cổng là 5m, vị trí thấp nhất của phần trên cổng cách mặt đất 3m và từ một điểm cách chân cổng 1m, người ta dùng thước đo được chiều cao là $\frac{91}{25}m$

Lời giải



Xem phần phía trên của cái cổng là một parabol, vậy để tìm được độ cao của cổng ta chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ với góc tọa độ O nằm ở vị trí chân của cổng.

- Gọi hàm số bậc 2 là $(P): y = f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$
- Do vị trí thấp nhất của phần trên cổng cách mặt đất 3m nên $A(0;3) \in (P) \Leftrightarrow 3 = c \quad (1)$
- Từ một điểm cách chân cổng 1m, người ta dùng thước đo được chiều cao là $\frac{91}{25}m$ nên:

$$B\left(1; \frac{91}{25}\right) \in (P) \Leftrightarrow \frac{91}{25} = a + b + c \quad (2)$$

- Chiều rộng của cổng là 5m nên $C(5;3) \in (P) \Leftrightarrow 3 = 25a + 5b + c \quad (3)$

• Từ (1),(2),(3) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} c = 3 \\ a + b + c = \frac{91}{25} \\ 25a + 5b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{4}{25} \\ b = \frac{4}{5} \\ c = 3 \end{cases}$$

• Suy ra phương trình: $y = f(x) = -\frac{4}{25}x^2 + \frac{4}{5}x + 3$

• Khi đó: độ cao của cổng chính là tung độ đỉnh $y_o = -\frac{\Delta}{4a} = 4m$

Vậy cổng cao 4m

Câu 48: Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe hơn đa Future Fi với chi phí mua vào một chiếc là 27 và bán ra với giá là 31 triệu đồng. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đầy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm là sẽ tăng thêm 200 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải định giá bán mới là bao nhiêu để sau khi đã thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất.

Lời giải

• Gọi x đồng là số tiền mà doanh nghiệp A dự định giảm giá; ($0 \leq x \leq 4$).

Khi đó:

• Lợi nhuận thu được khi bán một chiếc xe là $31 - x - 27 = 4 - x$.

• Số xe mà doanh nghiệp sẽ bán được trong một năm là $600 + 200x$.

• Lợi nhuận mà doanh nghiệp thu được trong một năm là:

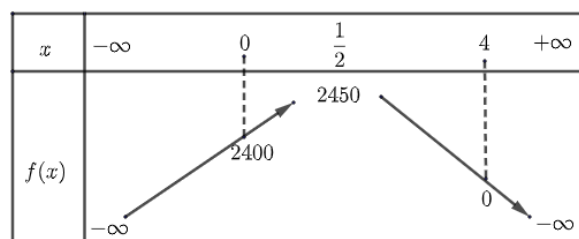
$$f(x) = (4 - x)(600 + 200x) = -200x^2 + 200x + 2400.$$

• Xét hàm số $f(x) = -200x^2 + 200x + 2400$ trên đoạn $[0; 4]$

• TXĐ: $D = R$

• Đỉnh $I\left(\frac{1}{2}; 2450\right)$

• BBT:



• Vậy $\max_{[0,4]} f(x) = 2450 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Tức là khi giảm giá mỗi xe đi 0,5 triệu đồng thì số xe bán ra được nhiều nhất

Vậy giá mới của chiếc xe là 30,5 triệu đồng thì lợi nhuận thu được là cao nhất.