

VI

HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

BÀI TOÁN THỰC TẾ VỀ TAM THỨC BẬC HAI.

Xác định hàm số bậc hai

Tính các yếu tố liên quan đến bài toán.

Câu 1: Độ cao của quả bóng golf tính theo thời gian có thể được xác định bằng một hàm bậc hai. Với các thông số cho trong bảng sau, hãy xác định độ cao quả bóng đạt được tại thời điểm 3 giây?

Thời gian (giây)	0	0,5	1	2
Độ cao (mét)	0	28	48	64

Lời giải

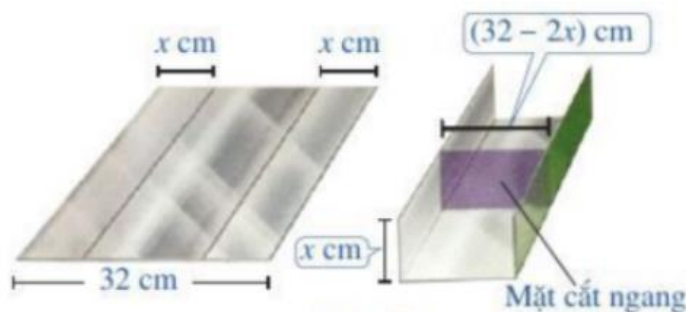
Độ cao của quả bóng tính theo thời gian được xác định bởi hàm số $h(t) = at^2 + bt + c$, t : giây, $t \geq 0$.

Với các thông số cho bởi bảng trên ta có:
$$\begin{cases} c = 0 \\ \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c = 28 \\ a + b + c = 48 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -16 \\ b = 64 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow h(t) = -16t^2 + 64t$$

$\Rightarrow h(3) = 48$.

Vậy độ cao quả bóng đạt được tại thời điểm 3 giây là 48 m.

Câu 2: Một miếng nhôm có bề ngang 32 cm được uốn cong tạo thành máng dẫn nước bằng chia tấm nhôm thành 3 phần rồi gấp 2 bên lại theo một góc vuông như hình vẽ bên dưới.



Hỏi x bằng bao nhiêu để tạo ra máng có diện tích mặt ngang S lớn nhất để có thể cho nước đi qua nhiều nhất?

Lời giải

Gọi $S(x)$ là diện tích mặt ngang ứng với bề ngang x của phần gấp hai bên, ta có:

$$S(x) = x(32 - 2x), \text{ với } 0 < x < 16.$$

Diện tích mặt ngang lớn nhất khi hàm số $S(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $(0; 16)$.

$$\text{Ta có: } S(x) = -2x^2 + 32x = -2(x - 8)^2 + 128 \leq 128, \forall x \in (0; 16).$$

$$\Rightarrow \max S(x) = S(8) = 128.$$

Vậy $x = 8$ cm thì diện tích mặt ngang lớn nhất.

Câu 3: Một cửa hàng bán bưởi với giá bán mỗi quả là 50000 đồng. Với giá bán này thì mỗi ngày cửa hàng chỉ bán được 40 quả. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 1000 đồng thì số bưởi bán tăng thêm được là 10 quả. Xác định giá bán để cửa hàng thu được lợi nhuận cao nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu cho mỗi quả là 30000 đồng.

Lời giải

Gọi x là giá bán thực tế của mỗi quả bưởi (x : đồng, $30000 \leq x \leq 50000$).

$$\text{Tương ứng với giá bán là } x \text{ thì số quả bán được là: } 40 + \frac{10}{1000}(50000 - x) = -\frac{1}{100}x + 540.$$

Gọi $f(x)$ là hàm lợi nhuận thu được ($f(x)$: đồng), ta có:

$$f(x) = \left(-\frac{1}{100}x + 540\right) \cdot (x - 30000) = -\frac{1}{100}x^2 + 840x - 16200000$$

Lợi nhuận thu được lớn nhất khi hàm $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $[30000; 50000]$

$$\text{Ta có: } f(x) = -\left(\frac{1}{10}x - 4200\right)^2 + 1440000 \leq 1440000, \forall x \in [30000; 50000]$$

$$\Rightarrow \max_{x \in [30000; 50000]} f(x) = f(42000) = 1440000.$$

Vậy với giá bán 42000 đồng mỗi quả bưởi thì cửa hàng thu được lợi nhuận lớn nhất.

Câu 4: Một vật được ném theo phương thẳng đứng xuống dưới từ độ cao $320m$ với vận tốc ban đầu $v_0 = 20 (m/s)$. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu giây, vật đó cách mặt đất không quá $100m$. Giả thiết rằng sức cản của không khí là không đáng kể.

Lời giải

Ta có quãng đường vật đó rơi khi cách mặt đất $100m$ là: $320 - 100 = 220$.

Thời gian vật đó di chuyển từ khi bắt đầu ném tới khi vật đó cách mặt đất không quá $100m$ là:

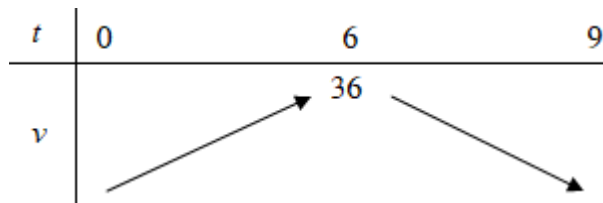
$$S = \frac{1}{2}gt^2 \geq 220 \Rightarrow t^2 \geq 44 \Rightarrow t \geq 2\sqrt{11}.$$

Câu 5: Một vật chuyển động theo quy luật $v = -t^2 + 12t$ với t là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động. Biết và $s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2 + 5$ là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, tại vị trí vận tốc lớn nhất của vật đạt được thì vật di chuyển được quãng đường bao nhiêu mét?

Lời giải

Ta có: $v(t) = -t^2 + 12t = -t^2 + 12t - 36 + 36 = -(t - 6)^2 + 36$

Bảng biến thiên của hàm số $v(t)$



Nhìn BBT ta thấy vận tốc đạt giá trị lớn nhất khi $t = 6$. Giá trị lớn nhất là $v(6) = 36 \text{ m/s}$.

Vậy quãng đường tại thời điểm $t = 6$ là: $s(6) = -\frac{1}{3}6^3 + 6.6^2 + 5 = 149 \text{ (m)}$.

Câu 6: Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t theo hàm số $f(t)$ Và $v(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh tại thời điểm t , $v(t) = -3t^2 + 90t + 10$. Xác định ngày mà tốc độ truyền bệnh là lớn nhất.

Lời giải

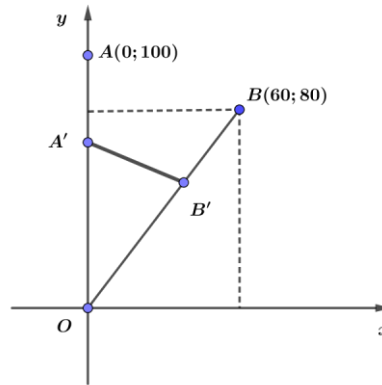
Xét hàm số $v(t) = -3t^2 + 90t + 10$,

Ta có bảng biến thiên:



Từ BBT suy ra tốc độ truyền bệnh là lớn nhất vào ngày thứ 15.

Câu 7: Hai con chuồn chuồn bay trên hai quỹ đạo khác nhau, xuất phát cùng thời điểm. Một con bay trên quỹ đạo là đường thẳng từ điểm $A(0;100)$ đến điểm $O(0;0)$ với vận tốc 5 m/s . Con còn lại bay trên quỹ đạo là đường thẳng từ $B(60;80)$ đến điểm $O(0;0)$ với vận tốc 10 m/s . Hỏi trong quá trình bay thì khoảng cách ngắn nhất hai con đạt được là bao nhiêu?



Lời giải

Xét tại thời điểm t , $t \in [0; 10]$, con chuồn chuồn bay từ A về O có tọa độ là $A'(0; 100 - 5t)$.

Con chuồn chuồn bay từ B(60; 80) về O(0; 0) trên quỹ đạo là đường thẳng có hệ số góc là $k = \tan \alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5}, \sin \alpha = \frac{4}{5}$.

Do đó tại thời điểm t , nó có tọa độ là $\begin{cases} x = 60 - 10t \cdot \cos \alpha \\ y = 80 - 10t \cdot \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 60 - 6t \\ y = 80 - 8t \end{cases} \Rightarrow B'(60 - 6t; 80 - 8t)$.

Ta có: $\overrightarrow{A'B'} = (60 - 6t; -20 - 3t)$.

Khi đó, khoảng cách giữa hai con chuồn chuồn là:

$$d = A'B' = \sqrt{(60 - 6t)^2 + (20 + 3t)^2} \Leftrightarrow d = \sqrt{45t^2 - 600t + 4000}$$

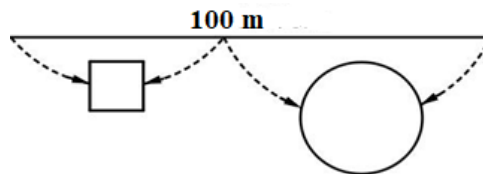
d nhỏ nhất khi hàm số $f(t) = 45t^2 - 600t + 4000$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0; 10]$.

Ta có: $f(t) = 5(3t - 20)^2 + 2000 \geq 2000, \forall t \in [0; 10]$

$$\Rightarrow \min_{t \in [0; 10]} f(t) = f\left(\frac{20}{3}\right) = 2000.$$

Vậy khoảng cách ngắn nhất của hai con chuồn chuồn trong quá trình bay là $\sqrt{2000} = 20\sqrt{5}$ m.

Câu 8: Một sợi dây kim loại dài 100 m được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất được uốn thành hình vuông, đoạn dây thứ hai được uốn thành vòng tròn.



Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn đạt giá trị nhỏ nhất là

Lời giải

6 | Ths. Lê Việt – THPT Thăng Long, Hà Nội – Phone: 0835221183 - Ôn thi cam kết điểm số

Suy ra parabol có phương trình $y = -\frac{2}{9}x^2 + \frac{8}{3}x$.

Do chiếc xe tải có chiều ngang $6m$ đi vào vị trí chính giữa cổng nên xe sẽ chạm tường tại điểm $A(3;6)$, khi đó chiều cao của xe là $h = 6$.

Vậy điều kiện để xe tải có thể đi vào cổng mà không chạm tường là $0 < h < 6$.

Câu 11: Cầu Cổng Vàng là một cây cầu treo bắc qua Cổng Vàng, eo biển rộng $1,6\text{ km}$ nối liền vịnh San Francisco và Thái Bình Dương. Cầu đã được Hiệp hội kỹ sư dân dụng Hoa Kỳ tuyên bố là một trong những kỳ quan thế giới hiện đại.



Chiều cao h tính từ mặt cầu của chiếc Cầu Cổng Vàng được xác định bởi công thức

$h(x) = \frac{19}{51200}x^2 - \frac{19}{40}x + 152$, trong đó x là khoảng cách từ cột trụ cầu bên trái. Hãy xác định khoảng cách giữa hai trụ cầu, biết rằng hai trụ cầu này có độ cao bằng nhau.

A. 1200 m.

B. 840 m.

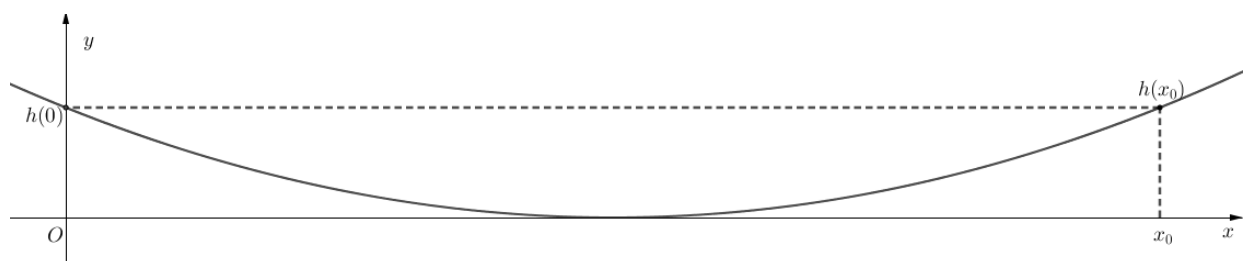
C. 640 m.

D. 1280 m.

Lời giải

Quan sát hình vẽ ta thấy độ cao của trụ cầu ứng với giá trị $x = 0$. Suy ra, độ cao của trụ cầu:

$h(0) = 152\text{ m}$.



Vì hai trụ cầu này có độ cao bằng nhau nên suy ra $h(0) = h(x_0)$ với $x_0 > 0$ hay

$$152 = \frac{19}{51200}x_0^2 - \frac{19}{40}x_0 + 152 \Rightarrow \frac{19}{51200}x_0^2 - \frac{19}{40}x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 1280\text{ m}.$$

Vậy, khoảng cách giữa hai trụ cầu là 1280 m.

Câu 12: Từ một khuôn nhôm làm bánh hình chữ nhật ban đầu có chiều dài 25 cm chiều rộng 20 cm , người ta muốn thay đổi kích thước khuôn thành $25 - x$ và $20 + x$ để được một khuôn mới. Hỏi với giá trị x nằm trong khoảng nào thì diện tích khuôn mới sẽ tăng so với diện tích ban đầu?

A. $(0,7)$.

B. $(5,10)$.

C. $(5,15)$.

D. $(0,5)$.

Lời giải

Diện tích ban đầu là: $25 \cdot 20 = 500 \text{ cm}^2$.

Diện tích khuôn mới là: $(25 - x)(20 + x)$, $x \in (-20; 25)$

Xét hàm số $f(x) = (25 - x)(20 + x) - 500 = -x^2 + 5x$, ta thấy khi $f(x) > 0$ thì diện tích sẽ tăng.

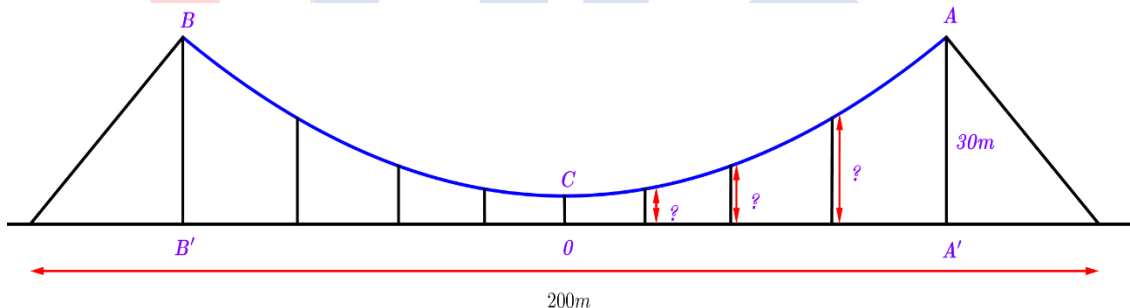
$$\text{Ta có } f(x) = -x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 5 \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	-20	0	5	25	
$f(x)$	+	0	-	0	+

Vậy $x \in (0, 5)$.

Câu 13: Một kĩ sư thiết kế cây cầu treo bắt ngang dòng sông. Ở hai bên dòng sông, kĩ sư thiết kế hai cột trụ đỡ AA' và BB' có độ cao 30m và bên trên có bắt một dây truyền có dạng Parabol (ACB) để đỡ nền cầu. Hai đầu của dây truyền được gắn chặt vào hai điểm A và B . Để chịu sức nặng của cây cầu và các phương tiện giao thông thì ở khoảng giữa cầu phải đặt thêm dây cáp treo thẳng đứng nối nền cầu với dây truyền. Biết khoảng cách giữa các dây cáp treo và hai cột trụ là bằng nhau và dây cáp có độ dài ngắn nhất là $OC = 5\text{m}$. Khoảng cách $A'B' = 200\text{m}$. Tính tổng chiều dài các cáp treo còn lại.



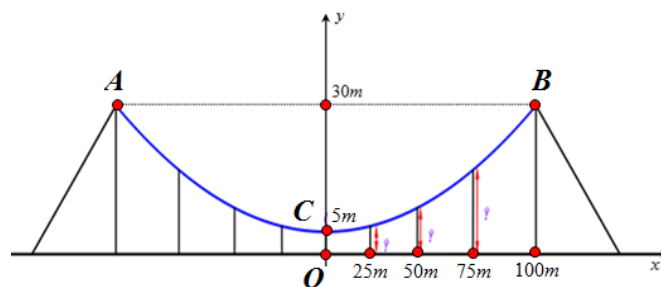
A. 36,875m.

B. 147,5m.

C. 73,75m.

D. 78,75m.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ (Oxy) như hình vẽ.

Parabol (P) có dạng: $y = ax^2 + b$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} B(100, 30) \in (P) \\ C(0; 5) \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10000a + b = 30 \\ b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{400} \\ b = 5 \end{cases}.$$

$$\text{Do đó Parabol } (P): y = \frac{1}{400}x^2 + 5.$$

Chiều dài các cáp treo còn lại lần lượt là: 6,5625m ; 11,25m ; 19,0625m .

Do đó, tổng chiều dài các cáp treo còn lại là: $2(6,5625 + 11,25 + 19,0625) = 73,75 \text{ m}$.

Câu 14: Một vật được bắn theo phương thẳng đứng từ dưới mặt đất với vận tốc ban đầu $v_0 = 300 \text{ m/s}$. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu giây, vật đó cách mặt đất không nhỏ hơn 50m? Giả thiết rằng sức cản của không khí là không đáng kể.

A. 0,167 (s). **B.** 1,067 (s). **C.** 0,165 (s). **D.** 1,167 (s).

Lời giải

Độ cao của vật so với mặt đất được cho bởi công thức

$$h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = 300t - 4,9t^2$$

Vật cách mặt đất không nhỏ hơn 50 m khi và chỉ khi $h(t) \geq 50 \Leftrightarrow 300t - 4,9t^2 \geq 50$

$$\Leftrightarrow 4,9t^2 - 300t + 50 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{150 - \sqrt{22255}}{4,9} \leq t \leq \frac{150 + \sqrt{22255}}{4,9}.$$

Vậy sau ít nhất $t = \frac{150 - \sqrt{22255}}{4,9} \approx 0,167$ thì vật đó cách mặt đất không nhỏ hơn 50 m.

Câu 15: Một vật được bắn theo phương thẳng đứng từ dưới mặt đất với vận tốc ban đầu $v_0 = 200 \text{ m/s}$. Hỏi vật đạt được độ cao không nhỏ hơn 100m so với mặt đất trong bao nhiêu giây? Giả thiết rằng sức cản của không khí là không đáng kể.

A. 38,9(s). **B.** 39,8(s). **C.** 40(s). **D.** 38,8(s).

Lời giải

Độ cao của vật so với mặt đất được cho bởi công thức

$$h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = 200t - 4,9t^2$$

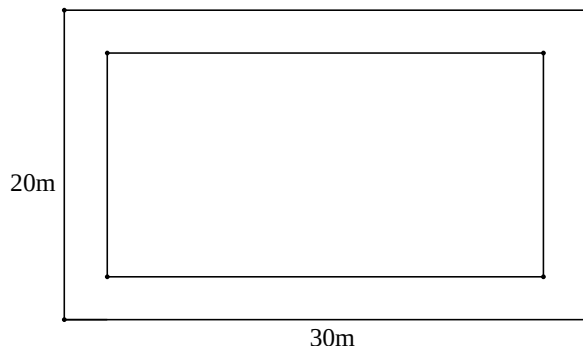
Vật cách mặt đất lớn hơn 100 m khi và chỉ khi $h(t) \geq 100 \Leftrightarrow 200t - 4,9t^2 \geq 100$

$$\Leftrightarrow 4,9t^2 - 200t + 100 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{100 - \sqrt{9510}}{4,9} \leq t \leq \frac{100 + \sqrt{9510}}{4,9}.$$

Vậy vật đạt được độ cao không nhỏ hơn 100 m so với mặt đất trong khoảng thời gian là

$$\frac{100 + \sqrt{9510}}{4,9} - \frac{100 - \sqrt{9510}}{4,9} = \frac{2\sqrt{9510}}{4,9} \approx 39,8.$$

Câu 16: Một anh nông dân có một mảnh đất hình chữ nhật với kích thước $20m \times 30m$. Anh ta muốn xây một lối đi bằng gạch viền cách đều xung quanh biên của mảnh đất. Nếu anh ta muốn có tối đa $460m^2$ diện tích đất còn lại cho trồng cây thì bề rộng của lối đi ít nhất là bao nhiêu?



A. 1,7m.

B. 1,4m.

C. 1,5m.

D. 1,6m.

Lời giải

Gọi $x(m)$ là bề rộng của lối đi. Điều kiện: $0 < x < 10$.

Chiều rộng của phần đất trồng cây là: $20 - 2x (m)$.

Chiều dài của phần đất trồng cây là: $30 - 2x (m)$.

Khi đó, diện tích của phần đất trồng cây là: $S = (20 - 2x)(30 - 2x)$.

Theo giả thiết ta có: $S \leq 460 \Leftrightarrow (20 - 2x)(30 - 2x) \leq 460$

$$4x^2 - 100x + 140 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{25 - \sqrt{485}}{2} \leq x \leq \frac{25 + \sqrt{485}}{2}.$$

Kết hợp với điều kiện ta có $\frac{25 - \sqrt{485}}{2} \leq x < 10$.

Vậy bề rộng của lối đi ít nhất là $\frac{25 - \sqrt{485}}{2} \approx 1,5(m)$.

Câu 17: Một cầu thủ muốn sút bóng vào khung thành từ vị trí đá phạt penanti. Biết rằng quỹ đạo chuyển động của quả bóng được mô tả bởi parabol $y = -m^2x^2 + 6mx$ ($m > 0$) và khung thành cao 2,44m. Gọi S là tập hợp các giá trị của m để xạ thủ đạt được mục đích và $10m$ nhận giá trị nguyên. Số phần tử của tập hợp S là

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Tại vị trí $x = 11,5m$, độ cao của quả bóng là:

$$y = -m^2 \cdot 11,5^2 + 6m \cdot 11,5 = -132,25m^2 + 69m.$$

Để quả bóng được sút vào khung thành thì m thỏa mãn đồng thời các bất phương trình sau:

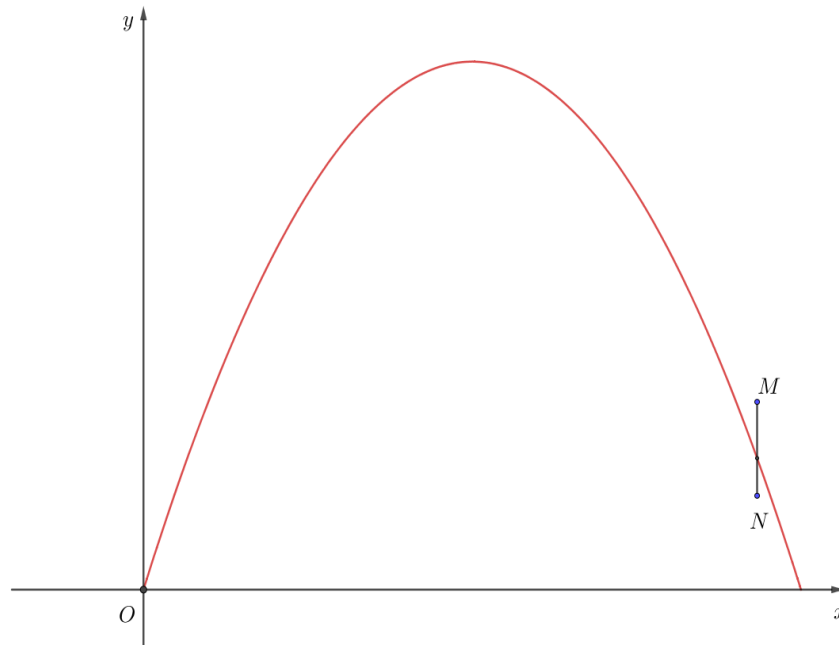
$$-132,25m^2 + 69m > 0 \quad (1) \text{ và } -132,25m^2 + 69m < 2,44 \quad (2)$$

Do $10m$ nhận giá trị nguyên nên có các giá trị của m thỏa mãn (1) là:

$$m \in \{0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5\}, \text{ các giá trị của } m \text{ thỏa mãn (2) là } m \in \{0,1; 0,2; 0,3; 0,4\}.$$

Vậy có 4 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 18: Một tình huống trong huấn luyện pháo binh được mô tả như sau: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , khẩu đại bác được biểu thị bằng điểm $O(0;0)$ và bia mục tiêu được biểu thị bằng đoạn thẳng MN với $M(2100;25)$ và $N(2100;15)$. Xạ thủ cần xác định parabol $y = -a^2x^2 + 10ax$ ($a > 0$) mô tả quỹ đạo chuyển động của viên đạn sao cho viên đạn bắn ra từ khẩu đại bác phải chạm vào bia mục tiêu. Tìm giá trị lớn nhất của a để xạ thủ đạt được mục đích trên.



A. $a_{\max} = \frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100}$. **B.** $a_{\max} = \frac{1}{240} + \frac{\sqrt{10}}{2100}$.

C. $a_{\max} = -\frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100}$. **D.** $a_{\max} = \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100}$.

Lời giải

Tại vị trí $x = 2100$, độ cao của viên đạn là:

$$y = -a^2 \cdot 2100^2 + 10a \cdot 2100 = -4410000a^2 + 21000a.$$

Viên đạn chạm được vào bia mục tiêu khi và chỉ khi a thỏa mãn các bất phương trình sau:

$$2100 \leq \frac{10}{a}; -4410000a^2 + 21000a \leq 25; -4410000a^2 + 21000a \geq 15.$$

$$+) \Leftrightarrow \frac{1}{a} \geq 210 \Leftrightarrow a \leq \frac{1}{210}. \text{ Vì } a > 0 \text{ nên } a \in \left(0; \frac{1}{210}\right].$$

$$+) \Leftrightarrow 4410000a^2 - 21000a + 15 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100} \leq a \leq \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100}$$

$$\Leftrightarrow a \in \left[\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100}; \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100} \right].$$

Do $\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100} > 0$ và $\frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100} < \frac{1}{210}$ nên ta có $a \in \left[\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100}; \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100} \right]$.

Vì thế viên đạn chạm được vào bia mục tiêu khi và chỉ khi $a \in \left[\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100}; \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100} \right]$.

Vậy giá trị lớn nhất của a là $a_{\max} = \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100}$.

- A.** 6. **B.** 5. **C.** -5 . **D.** 4.

Ta có diện tích hình tròn đường kính $AB=12$ là $S = \pi \cdot \frac{AB^2}{4} = 36\pi$.

Diện tích hình tròn đường kính AM là $S_1 = \pi \cdot \frac{AM^2}{4} = \frac{\pi}{4} x^2$.

$$\text{Diện tích hình tròn đường kính } NB \text{ là } S_2 = \pi \cdot \frac{NB^2}{4} = \frac{\pi}{4}(15-x)^2.$$

$$\text{Do đó } S(x) = S - (S_1 + S_2) = 36\pi - \frac{\pi}{4}(x^2 + (15-x)^2) = 36\pi - \frac{\pi}{4}(2x^2 - 30x + 225).$$

$S(x)$ nhận giá trị không âm.

$$S(x) \geq 0 \Leftrightarrow 36\pi - \frac{\pi}{4}(2x^2 - 30x + 225) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 30x + 81 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{15-3\sqrt{7}}{2} \leq x \leq \frac{15+3\sqrt{7}}{2}.$$

Do đó $M = 11$ và $m = 4$. Vậy $m^2 - M = 16 - 11 = 5$.

Câu 20: Bộ phận nghiên cứu thị trường của một xí nghiệp xác định tổng chi phí để sản xuất Q sản phẩm là $Q^2 + 180Q + 140000$. Giả sử giá mỗi sản phẩm bán ra thị trường là 1200 nghìn đồng. Tính số sản phẩm cần sản xuất để xí nghiệp không bị lỗ.

A. $164 \leq Q \leq 856$. **B.** $164 \leq Q \leq 858$. **C.** $163 \leq Q \leq 857$. **D.** $160 \leq Q \leq 857$.

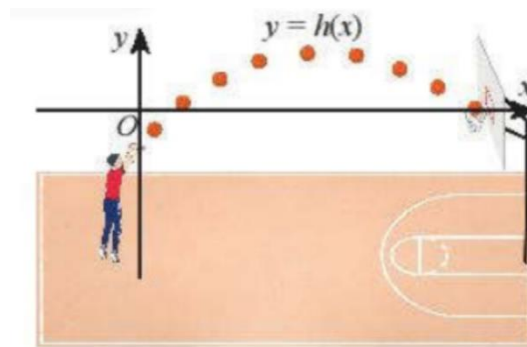
Lời giải

Doanh thu khi bán hết Q sản phẩm là $1200Q$.

Lợi nhuận thu được khi bán hết Q sản phẩm là $1200Q - (Q^2 + 180Q + 140000) = -Q^2 + 1020Q - 140000$.

Để không bị lỗ thì lợi nhuận thu được không âm, suy ra $-Q^2 + 1020Q - 140000 \geq 0$. Xét dấu tam thức bậc hai ta được $164 \leq Q \leq 856$.

Câu 21: Khi đặt hệ tọa độ Oxy như hình vẽ thì độ cao $h(x)$ của một quả bóng so với vành rổ khi di chuyển được x mét theo phương ngang từ điểm được ném mô phỏng bằng hàm số $h(x) = -0.1x^2 + x - 1$.



Trong các khoảng nào của x thì bóng nằm cao hơn vành rổ?

A. $2 \leq x \leq 9$. **B.** $1 \leq x \leq 7$. **C.** $2 \leq x \leq 8$. **D.** $1 \leq x \leq 9$.

Lời giải

14 | Ths. Lê Việt – THPT Thăng Long, Hà Nội – Phone: 0835221183 - Ôn thi cam kết điểm số

$$ax^2 + bx + c = dx^2 + ex + f$$

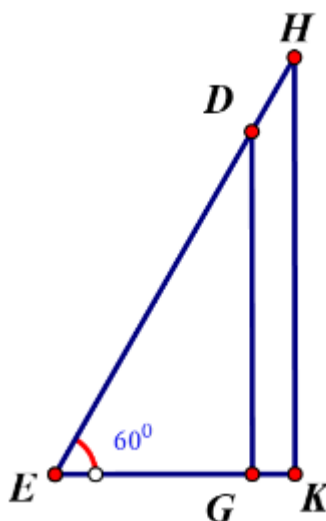
Bước 3: Thử lại các giá trị x tìm được ở Bước 2 có thoả mãn phương trình đã cho hay không và kết luận nghiệm.

Bước 1: Bình phương hai vế của phương trình để được phương trình $ax^2 + bx + c = (dx + e)^2$

Bước 2: Giải phương trình nhân được ở Bước 1.

Bước 3: Thử lại các giá trị x tìm được ở Bước 2 có thoả mãn phương trình đã cho hay không và kết luận nghiệm.

Câu 23: Để leo lên một bức tường, bác Nam dùng một chiếc thang có chiều dài cao hơn bức tường đó $1m$. Ban đầu, bác Nam đặt chiếc thang mà đầu trên của chiếc thang đó vừa chạm đúng vào mép trên bức tường (Hình a). Sau đó, bác Nam dịch chuyển chân thang vào gần chân tường thêm $0,5m$ thì bác Nam nhận thấy thang tạo với mặt đất một góc 60° (Hình b). Bức tường cao bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



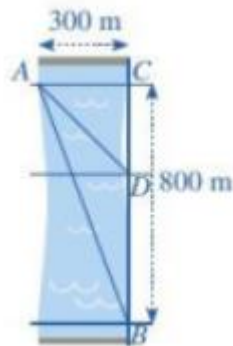
Chiều dài chiếc thang là $x+1(m)$

$$EG = \frac{DG}{\sqrt{3}} = \frac{x\sqrt{3}}{3} (m)$$
$$BC = \sqrt{(x+1)^2 - x^2} \text{ (m)}$$
$$\sqrt{(x+1)^2 - x^2} - 0,5 = \frac{x\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 - x^2} = \frac{x}{\sqrt{3}} + 0,5 \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} = \frac{x}{\sqrt{3}} + 0,5(*)$$

Ta có $\frac{x}{\sqrt{3}} + 0,5 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{3}} \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (Luôn đúng do $x > 0$)

$$2x+1=\left(\frac{x}{\sqrt{3}}+0,5\right)^2 \Leftrightarrow 2x+1=\frac{x^2}{3}+\frac{x}{\sqrt{3}}+0,25 \Leftrightarrow \frac{x^2}{3}+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-2\right)x-\frac{3}{4}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \approx 4,7(tm) \\ x \approx -0,5(ktm) \end{cases}$$

Câu 24: Một người đứng ở điểm A trên một bờ sông rộng 300 m, chèo thuyền đến vị trí D, sau đó chạy bộ đến vị trí B cách C một khoảng 800m như Hình. Vận tốc chèo thuyền là 6km/h , vận tốc chạy bộ là 10km/h và giả sử vận tốc dòng nước không đáng kể. Tính khoảng cách từ vị trí C đến D, biết tổng thời gian người đó chèo thuyền và chạy bộ từ A đến B là 7,2 phút.



Theo định lý Py-ta-go ta có: $AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{0,3^2 + (0,8 - x)^2} \text{ (km)}$

17 | Ths. Lê Việt – THPT Thăng Long, Hà Nội – Phone: 0835221183 - Ôn thi cam kết điểm số

Thời gian từ A đến M là: $\frac{\sqrt{16+x^2}}{3}(h)$

Thời gian từ M đến C là: $\frac{7-x}{5}(h)$

Tổng thời gian từ A đến C là 148 phút nên ta có:

$$\frac{\sqrt{16+x^2}}{3} + \frac{7-x}{5} = \frac{148}{60}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{16+x^2}}{3} + \frac{7-x}{5} = \frac{37}{15}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5\sqrt{16+x^2}}{15} + \frac{3(7-x)}{15} = \frac{37}{15}$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{16+x^2} + 3(7-x) = 37$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{16+x^2} = 16+3x$$

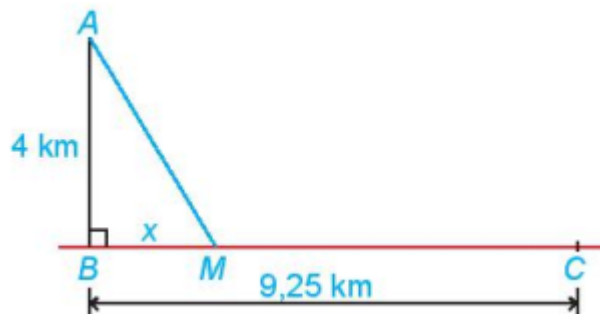
$$\Leftrightarrow 25(16+x^2) = 9x^2 + 96x + 256$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 - 96x + 144 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3(tm)$$

Vậy khoảng cách từ vị trí B đến M là 3 km.

Câu 26: Hằng ngày bạn Hùng đều đón bạn Minh đi học tại một vị trí trên lề đường thẳng đến trường. Minh đứng tại vị trí A cách lề đường một khoảng 50m để chờ Hùng. Khi nhìn thấy Hùng đạp xe đến địa điểm B, cách mình một đoạn 200m thì Minh bắt đầu đi bộ ra lề đường để bắt kịp xe. Vận tốc đi bộ Minh là 5 km/h, vận tốc xe đạp của Hùng là 15km/h. Hãy xác định vị trí C trên lề đường để hai bạn gặp nhau mà không bạn nào phải chờ người kia (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Lời giải

Đặt $CH = x(x > 0)$

Ta có: $AC = \sqrt{x^2 + 50^2} = \sqrt{x^2 + 2500}$

$$BH = \sqrt{200^2 - 50^2} = 50\sqrt{15}$$

$$BC = BH - CH = 50\sqrt{15} - x$$

Vì hai bạn gặp nhau tại C , nên thời gian đi từ A đến C bằng thời gian đi từ B đến C , nên ta có phương trình:

$$\frac{50\sqrt{15} - x}{15} = \frac{\sqrt{x^2 + 2500}}{5}$$

$$\Leftrightarrow 50\sqrt{15} - x = 3 \cdot \sqrt{x^2 + 2500}$$

Bình phương hai vế được:

$$37500 - 100\sqrt{15} \cdot x + x^2 = 9 \cdot (x^2 + 2500)$$

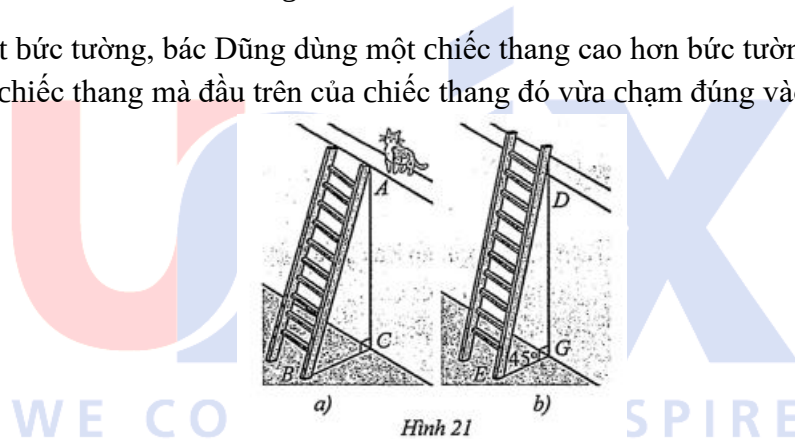
$$\Leftrightarrow 8x^2 + 100\sqrt{15} \cdot x - 15000 = 0$$

$$\Leftrightarrow x \approx 25,4 \text{ hoặc } x \approx -73,8$$

Thử lại phương trình và điều kiện $x > 0$ thì $x = 25,4$ thỏa mãn.

Vậy vị trí điểm C là cách H 1 khoảng 25,4 m.

Câu 27: Để leo lên một bức tường, bác Dũng dùng một chiếc thang cao hơn bức tường đó 2m. Ban đầu, bác Dũng đặt chiếc thang mà đầu trên của chiếc thang đó vừa chạm đúng vào 60



mép trên của bức tường (Hình 21a). Sau đó, bác Dũng dịch chuyển chân thang vào gần chân bức tường thêm 1m thì bác Dũng nhận thấy thang tạo với mặt đất một góc 45° (Hình 21b). Bức tường cao bao nhiêu mét?

Lời giải

Gọi chiều cao bức tường là $x(m)$ ($x > 0$). Khi đặt chiếc thang mà đầu trên của chiếc thang đó chạm đúng vào mép trên của bức tường thì khoảng cách chân thang đến chân tường là $\sqrt{(x+2)^2 - x^2} (m)$.

Khi thang tạo với mặt đất một góc 45° thì khoảng cách từ chân thang đến chân tường là $x(m)$.

Theo đề bài ta có phương trình: $\sqrt{(x+2)^2 - x^2} = x+1$.

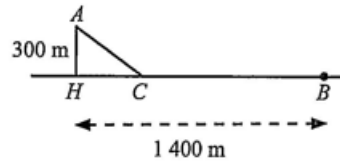
Giải phương trình trên ta có: $x = 3(m)$ với $x > 0$. Vậy chiều cao bức tường là 3m.

Câu 28: Một người đi bộ xuất phát từ B trên một bờ sông (coi là đường thẳng) với vận tốc $6km/h$ để gặp một người chèo thuyền xuất phát cùng lúc từ vị trí A với vận tốc $3km/h$. Nếu người chèo

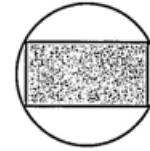
thuyền đi chuyển theo đường vuông góc với bờ thì phải đi một khoảng cách $AH = 300m$ và gặp người đi bộ tại địa điểm cách B một khoảng $BH = 1400m$. Tuy nhiên, nếu đi chuyển theo cách đó thì hai người không tới cùng lúc. Để hai người đến cùng lúc thì mỗi người cùng đi chuyển về vị trí C (Hình 22).

a) Tính khoảng cách CB .

b) Tính thời gian từ khi hai người xuất phát cho đến khi gặp nhau cùng lúc.



Hình 22



Hình 23

Lời giải

a) Đặt $CH = x(m)$ ($x > 0$). Ta có: $AC = \sqrt{300^2 + x^2}$, $CB = 1400 - x$.

Vì hai người gặp nhau cùng lúc tại C nên $\frac{\sqrt{300^2 + x^2}}{3000} = \frac{1400 - x}{6000} \Leftrightarrow 2\sqrt{300^2 + x^2} = 1400 - x$.

Giải phương trình trên ta có: $x = 400(m)$ với $x > 0$.

Vậy khoảng cách $CB = 1400 - 400 = 1000(m)$.

b) Thời gian hai người bắt đầu đi chuyển cho đến khi tới C là 10 phút.

Câu 29: Người ta muốn thiết kế một vườn hoa hình chữ nhật nội tiếp trong một miếng đất hình tròn có đường kính bằng $50m$ (Hình 23). Xác định kích thước vườn hoa hình chữ nhật để tổng quãng đường đi xung quanh vườn hoa đó là $140m$.

Lời giải

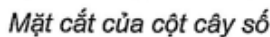
Đặt độ dài một cạnh của hình chữ nhật là $x(m)$ ($0 < x < 50$). Vì độ dài đường chéo hình chữ nhật bằng đường kính hình tròn nên độ dài cạnh còn lại của hình chữ nhật đó là $\sqrt{2500 - x^2} (m)$.

Khi đó, tổng quãng đường đi xung quanh vườn hoa bằng chu vi hình chữ nhật là:

$$2(\sqrt{2500 - x^2} + x) = 140(m).$$

Giải phương trình trên ta có: $x = 40(m)$ hoặc $x = 30(m)$. Nếu $x = 40(m)$ thì độ dài cạnh còn lại là $30m$ và ngược lại. Vậy kích thước vườn hoa là $30 \times 40m$.

Câu 30: Mặt cắt đứng của cột cây số trên quốc lộ có dạng nửa hình tròn ở phía trên và phía dưới có dạng hình chữ nhật (xem hình bên). Biết rằng đường kính của nửa hình tròn cũng là cạnh phía trên của hình chữ nhật và đường chéo của hình chữ nhật có độ dài $66cm$. Tìm kích thước của hình chữ nhật, biết rằng diện tích của phần nửa hình tròn bằng $0,3$ lần diện tích của phần hình chữ nhật. Lấy $\pi = 3,14$ và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai.



Lời giải

Gọi đường kính của nửa hình tròn là $x(cm)$ ($x > 0$). Độ dài cạnh bên của hình chữ nhật là $\sqrt{66^2 - x^2}$. Diện tích nửa hình tròn là $\frac{3,14x^2}{8}$. Diện tích hình chữ nhật là $x\sqrt{66^2 - x^2}$. Theo giả thiết ta có:

$$\frac{3,14x^2}{8} = 0,3x\sqrt{66^2 - x^2} \Leftrightarrow 157x = 120\sqrt{66^2 - x^2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{62726400}{39049} \Leftrightarrow x \approx \pm 40,08.$$

Vây kích thước của hình chữ nhật khoảng $40,08\text{cm} \times 52,44\text{cm}$.

Câu 31: Giải phương trình: $\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1=0$ (*).

Lời giải

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = -x^2 + 3x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 3x - 1 \geq 0 \\ 2x - 1 = (-x^2 + 3x - 1)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 3x - 1 \geq 0 \\ x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 8x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 3x - 1 \geq 0 \\ (x-1)^2(x^2 - 4x + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 - \sqrt{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Phương trình đã cho có 2 nghiệm $x=1, x=2-\sqrt{2}$.

Câu 32: Giải phương trình: $x^2 - 4x - 3 = \sqrt{x+5}$ (*).

Lời giải

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 3 \geq 0 \\ (x^2 - 4x - 3)^2 = x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 - \sqrt{7} \vee x \geq 2 + \sqrt{7} \\ x^4 - 8x^3 + 10x^2 + 23x + 4 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 - \sqrt{7} \vee x \geq 2 + \sqrt{7} \\ (x^2 - 5x - 1) \cdot (x^2 - 3x - 4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5 + \sqrt{29}}{2} \text{ hoặc } x = -1. \end{aligned}$$

Phương trình đã cho có 2 nghiệm: $x = -1$, $x = \frac{5 + \sqrt{29}}{2}$.

Câu 33: Giải phương trình: $2\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1}=2\sqrt{2x-1}$ (*).

Lời giải

$$\Leftrightarrow 4(3x+1) = x-1 + 4(2x-1) + 4\sqrt{(x-1)(2x-1)}$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{2x^2-3x+1}=3x+9 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 23x^2-102x-65=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=5.$$

Câu 34: Giải phương trình $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+4} = 3$.

Điều kiện $x \geq -1$.

Ta có $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+4} = 3 \Leftrightarrow (\sqrt{x+1} + \sqrt{x+4})^2 = 9$

$$\Leftrightarrow 2x+5+2\sqrt{(x+1)(x+4)}=9 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+5x+4}=2-x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x^2+5x+4=(2-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ 9x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$$

Câu 35: Giải phương trình $\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} = \sqrt{9+2x}$.

Điều kiện $-1 \leq x \leq 4$

Ta có $\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} = \sqrt{9+2x} \Leftrightarrow (\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x})^2 = 2x+9$

$$\Leftrightarrow x+1+2\sqrt{(x+1)(4-x)}+4-x=2x+9 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(4-x)}=x+2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{-x^2 + 3x + 4} = x + 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ -x^2 + 3x + 4 = x^2 + 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 2x^2 + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Câu 36: Giải phương trình $\sqrt{x^2+3}+\sqrt{2x^2-1}=\sqrt{3x^2+6}$.

$$\text{Điều kiện } 2x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Ta có $\sqrt{x^2+3}+\sqrt{2x^2-1}=\sqrt{3x^2+6} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{2x^2-1}\right)^2=3x^2+6$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3 + 2\sqrt{(x^2 + 3)(2x^2 - 1)} + 2x^2 - 1 = 3x^2 + 6$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x^2 + 3)(2x^2 - 1)} = 2 \Leftrightarrow 2x^4 + 5x^2 - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = -\frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = -1$ và $x = 1$.

Câu 37: Giải phương trình $\sqrt{x^4 - 4x^3 + 14x - 11} = 1 - x$.

Lời giải

$$\sqrt{x^4 - 4x^3 + 14x - 11} = 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ x^4 - 4x^3 + 14x - 11 = (1 - x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ (x - 3)(x - 2)(x - 1)(x + 2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = 1; x = -2$.

Câu 38: Giải phương trình $\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1} = 3\sqrt{3x-2}$.

Lời giải

$$\text{ĐK: } \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \\ 3x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}.$$

Phương trình đã cho tương đương với:

$$(\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1})^2 = (3\sqrt{3x-2})^2 \Leftrightarrow 3x + 2 + 2\sqrt{2x^2 + 5x - 3} = 27x - 18$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + 5x - 3} = 12x - 10 \Leftrightarrow \begin{cases} 12x - 10 \geq 0 \\ 2x^2 + 5x - 3 = 144x^2 - 240x + 100 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{6} \\ 142x^2 - 245x + 103 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{6} \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{103}{142} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Đối chiếu điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Lời giải

$$3x+17=6\sqrt{2x+3}+4\sqrt{x+1} \Leftrightarrow 2x+3-6\sqrt{2x+3}+9+x+1-4\sqrt{x+1}+4=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2x+3}-3)^2 + (\sqrt{x+1}-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+3}-3=0 \\ \sqrt{x+1}-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+3}=3 \\ \sqrt{x+1}=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=3 \quad (tm)$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{3\}$.

Câu 47: Giải phương trình $x^2 - 4x - 1 = 2\sqrt{3x^2 + 1}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \geq -1$

$$x^2 - 4x - 1 = 2\sqrt{3x^2 + 1} \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 3x^2 + 1 + 2\sqrt{3x^2 + 1} + 1$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^2 = (\sqrt{3x^2+1}+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 = \sqrt{3x^2+1}+1 \\ -2x+1 = \sqrt{3x^2+1}+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x^2+1} = 2x-2 \\ \sqrt{3x^2+1} = -2x \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \sqrt{3x^2+1} = 2x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2 \geq 0 \\ 3x^2+1 = 4x^2-8x+4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4 + \sqrt{13} \quad (tm)$$

$$\sqrt{3x^2+1} = -2x \Leftrightarrow \begin{cases} -2x \geq 0 \\ 3x^2+1 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1 \quad (tm)$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{-1; 4 + \sqrt{13}\}$.

Câu 48: Giải phương trình $\sqrt{x^2 + x + 2} = \frac{2x^2 + 3x + 2}{2x + 2}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \neq -1$.

$$\sqrt{x^2 + x + 2} = \frac{2x^2 + 3x + 2}{2x + 2} \Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 2 = (2x + 2)\sqrt{x^2 + x + 2}$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + x + 2) - (2x + 2)\sqrt{x^2 + x + 2} + x^2 + 2x + 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + x + 2} - x - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + x + 2} = x + 2 \\ \sqrt{x^2 + x + 2} = x \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \sqrt{x^2 + x + 2} = x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ x^2 + x + 2 = x^2 + 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} \quad (tm)$$

$$\sqrt{x^2 + x + 2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + x + 2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = -2 \end{cases} \quad (VN).$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$.

Câu 49: Giải phương trình $x^4 + x^2 + 14 = 2(x^2 - 1)\sqrt{x^2 + 1} + 6\sqrt{2x^2 + 3}$.

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + 14 &= 2(x^2 - 1)\sqrt{x^2 + 1} + 6\sqrt{2x^2 + 3} \\ \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 - 2(x^2 - 1)\sqrt{x^2 + 1} + x^2 + 1 + 2x^2 + 3 - 6\sqrt{2x^2 + 3} + 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^2 - 1 - \sqrt{x^2 + 1})^2 + (\sqrt{2x^2 + 3} - 3)^2 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 - \sqrt{x^2 + 1} = 0 \\ \sqrt{2x^2 + 3} - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Câu 50: Giải phương trình $(2x+3)\sqrt{4x^2+12x+11}+3x\sqrt{9x^2+2}+5x+3=0$ ($x \in \mathbb{R}$).

Câu 51: Giải phương trình $\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{2x^2+1} + \sqrt[3]{2x^2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

$$\text{Do đó } \Leftrightarrow f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{1; \frac{-1}{2}\right\}$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt[3]{x+2} \\ v = \sqrt[3]{2x^2+1} \end{cases}$ khi đó phương trình trở thành: $\sqrt[3]{u^3+1}+u = \sqrt[3]{v^3+1}+v$

$$f'(t) = \frac{t^2}{\sqrt[3]{(t^3+1)^2}} + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \text{ suy ra hàm số đồng biến trên } \mathbb{R}.$$

Với $u = v$ ta có $\sqrt[3]{x+2} = \sqrt[3]{2x^2+1} \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{1; \frac{-1}{2}\right\}$

Lời giải

Hàm số đồng biến trên tập số thực, phương trình trở thành $f(2x) = f(\sqrt{2x+1})$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=1; x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 2; x = \frac{5 \pm \sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 4; x = \frac{11 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Cộng vế với vế của hai phương trình với nhau ta được phương trình:

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = y^3 + y \Leftrightarrow (x+1)^3 + (x+1) = y^3 + y$$

Xét hàm số: $f(t) = t^3 + t$ với $t \in \mathbb{R}$, hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác $f(t)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Do đó } \Leftrightarrow f(x+1) = f(y) \Leftrightarrow x+1 = y$$

$$\text{Với } y = x+1 \text{ ta có } x+1 = \sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4} \Leftrightarrow (x+1)^3 = 7x^2 + 9x - 4 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)(x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của phương trình là: } S = \left\{ 5; \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

Câu 60: Giải phương trình $2\sqrt{2x+4} + 4\sqrt{2-x} = \sqrt{9x^2+16}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 2x+4 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2.$$

$$\text{Ta có: } 2\sqrt{2x+4} + 4\sqrt{2-x} = \sqrt{9x^2+16} \Leftrightarrow 16\sqrt{-2x^2+8} = 9x^2 + 8x - 32.$$

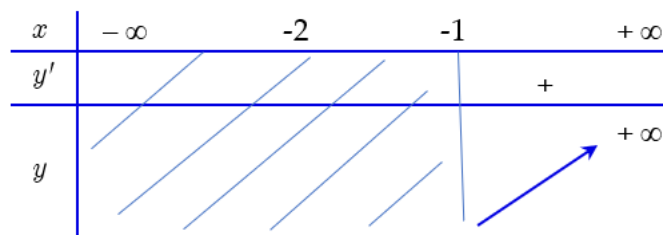
$$\Leftrightarrow 4(-2x^2+8) + 16\sqrt{-2x^2+8} = x^2 + 8x$$

$$\Leftrightarrow 4(-2x^2+8) + 16\sqrt{-2x^2+8} = 4\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 16\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\text{Từ điều kiện } -2 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow \frac{x}{2} \in [-1; 1]$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = 4t^2 + 16t \text{ với } t \in [-1; +\infty)$$

$$f'(t) = 8t + 16 \Rightarrow f'(t) = 0 \Rightarrow t = -2.$$



Từ bảng biến thiên ta thấy $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $[-1; +\infty)$.

Mặt khác $f(t)$ là hàm số liên tục trên $[-1; +\infty)$.

$$\Leftrightarrow f\left(\sqrt{-2x^2+8}\right)=f\left(\frac{x}{2}\right)\Leftrightarrow \sqrt{-2x^2+8}=\frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2+8=\left(\frac{x}{2}\right)^2 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2=32 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm \frac{4\sqrt{2}}{3} \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Câu 61: Giải phương trình $x^3-x^2-10x-2=\sqrt[3]{7x^2+23x+12}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } pt \Leftrightarrow (x+2)^3+(x+2)=7x^2+23x+12+\sqrt[3]{7x^2+23x+12}$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$. Hàm số đồng biến trên tập số thực, phương trình trở thành

$$f(x+2)=f\left(\sqrt[3]{7x^2+23x+12}\right)\Leftrightarrow x+2=\sqrt[3]{7x^2+23x+12}$$

$$\Leftrightarrow x^3+6x^2+12x+8=7x^2+23x+12\Leftrightarrow x^3-x^2-11x-4=0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(x^2+3x+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Câu 62: Giải phương trình $x^3-15x^2+76x-130+(x+2)\sqrt{x+1}=0$.

Lời giải

Điều kiện xác định của phương trình $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$.

Ta có

$$x^3-15x^2+76x-130+(x+2)\sqrt{x+1}=0 \Leftrightarrow (5-x)^3+(5-x)=(\sqrt{x+1})^3+\sqrt{x+1} (*)$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Phương trình tương đương } f(5-x)=f(\sqrt{x+1}) \Leftrightarrow 5-x=\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-x \geq 0 \\ x+1=(5-x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ x^2-11x+24=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ \begin{cases} x=3 \\ x=8 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=3$.