

VIII

ĐẠI SỐ TỔ HỢP

Câu 130: Trên giá sách có 15 cuốn sách khác nhau, gồm 6 cuốn sách môn Toán, 5 cuốn sách môn Vật lí, 4 cuốn sách môn Hóa học. Có bao nhiêu cách lấy ra 2 cuốn sách khác môn từ 15 cuốn sách đó?

Lời giải

Để lấy ra 2 cuốn sách khác môn từ 15 cuốn sách có 3 trường hợp sau:

- TH1: Chọn 1 cuốn sách Toán và 1 cuốn sách Vật lí.

Để hoàn thành công việc trên ta có hai công đoạn:

+ Công đoạn 1: Chọn 1 cuốn sách từ 6 cuốn sách Toán có 6 cách;

+ Công đoạn 2: Chọn 1 cuốn sách từ 5 cuốn sách Vật lí có 5 cách.

Do đó, có $6 \cdot 5 = 30$ cách.

- TH2: Chọn 1 cuốn sách Vật lí và 1 cuốn sách Hóa học.

+ Công đoạn 1: Chọn 1 cuốn sách từ 5 cuốn sách Vật lí có 5 cách;

+ Công đoạn 2: Chọn 1 cuốn sách từ 4 cuốn sách Hóa học có 4 cách.

Do đó, có $5 \cdot 4 = 20$ cách.

- TH3: Chọn 1 cuốn sách Toán và 1 cuốn sách Hóa học.

+ Công đoạn 1: Chọn 1 cuốn sách từ 6 cuốn sách Toán có 6 cách;

+ Công đoạn 2: Chọn 1 cuốn sách từ 4 cuốn sách Hóa học có 4 cách.

Do đó, có $6 \cdot 4 = 24$ cách.

Vậy để lấy ra 2 cuốn sách khác môn từ 15 cuốn sách ta có $30 + 20 + 24 = 74$ cách.

Câu 131: Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 song song với nhau. Trên d_1 có 12 điểm phân biệt, trên d_2 có 10 điểm phân biệt. Hỏi có bao nhiêu tam giác mà ba đỉnh của nó được chọn từ 17 điểm vừa nói trên.

Lời giải

TH1: Tam giác có một đỉnh thuộc d_1 và hai đỉnh thuộc d_2 .

Số cách chọn một điểm trong 12 thuộc d_1 : C_{12}^1 .

Số cách chọn bộ hai điểm trong 10 điểm thuộc d_2 : C_{10}^2 .

TH này có $C_{12}^1 \cdot C_{10}^2$ tam giác.

TH2: Tam giác có một đỉnh thuộc d_2 và hai đỉnh thuộc d_1 .

Số cách chọn bộ hai điểm trong 12 thuộc d_1 : C_{12}^2 .

Số cách chọn một điểm trong 10 điểm thuộc d_2 : C_{10}^1 .

TH này có $C_{12}^2 \cdot C_{10}^1$ tam giác.

Vậy có tất cả 1200 tam giác thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 132: Có bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số khác nhau sao cho chữ số 2 đứng liền giữa số 1 và 3.

Lời giải

Gọi số có 7 chữ số khác nhau là $\overline{abcdefg}$.

Để tìm số trên ta có các trường hợp sau:

TH1: Số 2 đứng liền giữa các số 1 và 3 cạnh nhau kể cả trường hợp số 0 đứng đầu.

- Xếp số 2 đứng liền giữa các số 1 và 3 có 2 cách.
- Xếp 3 số trên vào 3 vị trí liên tiếp trong 7 vị trí có 5 cách.
- Chọn 4 số xếp vào 4 vị trí còn lại có $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ cách.

Theo quy tắc nhân có: $10 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 8400$ số.

TH2: Số có dạng $\overline{0bcdefg}$.

- Xếp số 2 đứng liền giữa các số 1 và 3 có 2 cách.
- Xếp 3 số trên vào 3 vị trí liên tiếp trong 6 vị trí có 4 cách.
- Chọn 3 số xếp vào 3 vị trí có lại có: $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ cách.

Theo quy tắc nhân có: $8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 960$ số.

Vậy số thỏa mãn ycbt: $8400 - 960 = 7440$ số.

Câu 133: Từ các chữ số 0,1,2,3,5,8 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ có bốn chữ số đôi một khác nhau và phải có mặt chữ số 3.

Lời giải

♦ Đặt $X = \{0;1;2;3;5;8\}$.

Gọi số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau là $\overline{abcd}$ ($a \neq 0; a,b,c,d \in X; a,b,c,d$ đôi một khác nhau).

Do số cần lập là số lẻ nên $d \in \{1;3;5\}$ và phải có mặt chữ số 3 nên ta có các trường hợp.

♦ TH1: $a=3$ khi đó số có dạng $\overline{3bcd}$.

Có 2 cách chọn d , vì $d \neq a, d \in \{1;3;5\}$.

Có 4 cách chọn b , vì $b \neq a, b \neq d, b \in X$.

Có 3 cách chọn c , vì $c \neq a, c \neq b, c \neq d, c \in X$.

Theo quy tắc nhân có $1.4.3.2 = 24$.

♦ TH2: $b = 3$ khi đó số có dạng $\overline{a3cd}$.

Có 2 cách chọn d , vì $d \neq b, d \in \{1; 3; 5\}$.

Có 3 cách chọn a , vì $a \neq b, a \neq d, a \neq 0, a \in X$.

Có 3 cách chọn c , vì $c \neq a, c \neq b, c \neq d, c \in X$.

Theo quy tắc nhân có $1.2.3.3 = 18$.

♦ TH3: $c = 3$ khi đó số có dạng $\overline{ab3d}$.

Có 2 cách chọn d , vì $d \neq c, d \in \{1; 3; 5\}$.

Có 3 cách chọn a , vì $a \neq c, a \neq d, a \neq 0, a \in X$.

Có 3 cách chọn b , vì $b \neq a, b \neq c, b \neq d, b \in X$.

Theo quy tắc nhân có $1.2.3.3 = 18$.

♦ TH4: $d = 3$ khi đó số có dạng $\overline{abc3}$.

Có 4 cách chọn a , vì $a \neq d, a \neq 0, a \in X$.

Có 4 cách chọn b , vì $b \neq a, b \neq d, b \in X$.

Có 3 cách chọn c , vì $c \neq a, c \neq b, c \neq d, c \in X$.

Theo quy tắc nhân có $1.4.4.3 = 48$.

♦ Theo quy tắc cộng có $24 + 18 + 18 + 48 = 108$.

bé hơn 100.

Câu 134: Một công ty có 9 nam và 13 nữ trong đó có đúng 2 cặp vợ chồng. Công ty muốn chọn 1 đội chơi tham dự teambuilding gồm 5 người. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 5 người trong số 22 người đó nhưng không có cặp vợ chồng nào?

Lời giải

Để chọn ra 5 người trong số 22 người đó nhưng không có cặp vợ chồng nào ta có các TH sau:

TH1: Chọn 5 người từ 18 người không có cặp vợ chồng nào có C_{18}^5 cách.

TH2: Chọn 1 người từ 2 cặp vợ chồng và 4 người từ 18 người có $C_4^1 \cdot C_{18}^4$ cách.

TH3: Chọn 2 người từ 2 cặp vợ chồng sao cho không phải là một cặp và 3 người từ 18 người: có $(C_4^2 - 2)C_{18}^3$ cách.

Vậy có 24072 cách.

Câu 135: Có 28 phần thưởng gồm 9 cuốn sách, 8 cuốn sổ, và 11 chiếc bút được phát cho 14 học sinh giỏi, mỗi người nhận được 2 phần thưởng khác loại. An và Bình là hai trong số 14 học sinh được nhận

thường. Hỏi có bao nhiêu cách phát phần thưởng cho 14 học sinh đó để An và Bình được nhận phần thưởng có loại giống nhau?

Lời giải

Gọi a là số học sinh nhận được sách và sổ; b là số học sinh nhận được sách và bút; c là số học sinh nhận được sổ và bút. Ta có: $a+b=9$, $a+c=8$ và $b+c=11$.

Giải ra ta được $a=3$, $b=6$, $c=5$.

Xét ba trường hợp sau :

TH 1: An và Bình cùng nhận được sách và sổ. Có 3 người cùng nhận được sách và sổ, trong đó có An và Bình. Vì vậy cần chọn ra 1 người trong số 12 học sinh để nhận sách và sổ suy ra có C_{12}^1 cách chọn. Sau đó chọn ra 6 em trong số 11 học sinh còn lại để nhận sách và bút và 5 học sinh còn lại nhận sổ và bút. Vậy số kết quả trong TH này là: $C_{12}^1.C_{11}^6$

TH 2: An và Bình cùng nhận được sách và bút. Lập luận tương tự TH 1 ta có số kết quả trong TH này là: $C_{12}^4.C_8^3$.

TH 3: An và Bình cùng nhận được sổ và bút. Số kết quả trong TH này là: $C_{12}^3.C_9^3$.

Vậy có $C_{12}^1.C_{11}^6 + C_{12}^4.C_8^3 + C_{12}^3.C_9^3 = 51744$ cách phát phần thưởng thỏa mãn bài toán.

Câu 136: Từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau, trong đó chữ số 2 và 3 không đứng cạnh nhau.

Lời giải

♦ Đặt $X = \{0;1;2;3;4;5\}$.

Gọi A là tập hợp gồm các số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau mà không quan tâm đến chữ số 2 và 3 có đứng cạnh nhau hay không.

B là tập hợp gồm các số tự nhiên gồm bốn chữ số khác nhau mà chữ số 2 và 3 đứng cạnh nhau.

C là tập hợp gồm các số tự nhiên gồm bốn chữ số khác nhau mà chữ số 2 và 3 không đứng cạnh nhau.

Khi đó: $n(C) = n(A) - n(B)$.

Gọi $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ là số tự nhiên gồm bốn chữ số khác nhau ($a_1 \neq 0; a_1, a_2, a_3, a_4 \in X; a_1, a_2, a_3, a_4$ đôi một khác nhau).

♦ Nếu $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ là số tự nhiên gồm bốn chữ số khác nhau mà không quan tâm đến chữ số 2 và 3 có đứng cạnh nhau hay không.

♦ a_1 có 5 cách chọn, vì $a_1 \neq 0, a_1 \in X$.

a_2 có 5 cách chọn, vì $a_2 \neq a_1, a_2 \in X$.

a_3 có 4 cách chọn, vì $a_3 \neq a_2, a_3 \neq a_1, a_3 \in X$.

a_4 có 3 cách chọn, vì $a_4 \neq a_3, a_4 \neq a_2, a_4 \neq a_1, a_4 \in X$.

Suy ra, có $5.5.4.3 = 300$ số.

♦ Nếu $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ là số tự nhiên gồm bốn chữ số khác nhau mà chữ số 2 và 3 đứng cạnh nhau.

+ Trường hợp 1: Hai chữ số 2 và 3 đứng ở vị trí a_1 và a_2 .

Nếu hai chữ số 2 và 3 theo thứ tự đứng ở vị trí a_1 và a_2 thì

a_1 có 1 cách chọn, vì $a_1 = 2$.

a_2 có 1 cách chọn, $a_2 = 3$.

a_3 có 4 cách chọn, vì $a_3 \neq a_2, a_3 \neq a_1, a_3 \in X$.

a_4 có 3 cách chọn, vì $a_4 \neq a_3, a_4 \neq a_2, a_4 \neq a_1, a_4 \in X$.

Suy ra, có $1.1.4.3 = 12$ số.

Tương tự, chữ số 3 đứng ở vị trí a_1 và chữ số 2 đứng ở vị trí a_2 ; ta cũng lập được 12 số.

Do đó, trong trường hợp này có $12 + 12 = 24$ số.

+ Trường hợp 2: Hai chữ số 2 và 3 đứng ở vị trí a_2 và a_3 .

Nếu chữ số 2 đứng ở vị trí a_2 , chữ số 3 đứng ở vị trí a_3 thì

a_1 có 3 cách chọn, vì $a_1 \neq 0, a_1 \neq 2, a_1 \neq 3, a_1 \in X$.

a_2 có 1 cách chọn, vì $a_2 = 2$.

a_3 có 1 cách chọn, vì $a_3 = 3$.

a_4 có 3 cách chọn, vì $a_4 \neq a_3, a_4 \neq a_2, a_4 \neq a_1, a_4 \in X$.

Suy ra, có $3.1.1.3 = 9$ số.

Tương tự, chữ số 3 đứng ở vị trí a_2 , chữ số 2 đứng ở vị trí a_3 ; ta cũng lập được 9 số.

Do đó, trong trường hợp 2 có $9 + 9 = 18$ số.

+ Trường hợp 3: Hai chữ số 2 và 3 đứng ở vị trí a_3 và a_4 .

Tương tự trường hợp 2, ta lập được 18 số.

Do đó có tất cả $24 + 18 + 18 = 60$ số có bốn chữ số khác nhau mà chữ số 2 và 3 đứng cạnh nhau.

♦ Vậy số các số có bốn chữ số khác nhau mà chữ số 2 và 3 không đứng cạnh nhau là

$300 - 60 = 240$ số.

Câu 137: Cho đa giác đều 30 cạnh nội tiếp đường tròn. Xác định số hình thang không là hình chữ nhật có 4 đỉnh là các đỉnh của đa giác đều nói trên.

Lời giải

Hình thang nội tiếp đường tròn là hình thang cân và luôn có trục đối xứng đi qua tâm nên ta chỉ xét trục đối xứng vuông góc với hai đáy của hình thang trong hai trường hợp.

TH1: Trục đối xứng của hình thang đi qua hai đỉnh của đa giác đều

Chọn một trục đối xứng có 15 cách

Mỗi trục đối xứng như vậy ta có C_{14}^2 cách chọn các đỉnh của hình thang nhận trục đối xứng đó

Suy ra $15.C_{14}^2 = 1365$ hình thang có trục đối xứng đi qua các đỉnh đa diện

TH2: Trục đối xứng không đi qua đỉnh của đa giác đều

Chọn một trục đối xứng như vậy ta có 15 cách

Mỗi trục đối xứng như vậy ta có C_{15}^2 cách chọn các đỉnh của hình thang nhận trục đối xứng đó

Suy ra $15.C_{15}^2 = 1575$ hình thang có trục đối xứng không qua các đỉnh của đa giác đều

Lại có $C_{15}^2 = 105$ hình chữ nhật là hình thang có hai trục đối xứng nên số hình thang thỏa mãn yêu cầu bài toán là $1365 + 1575 - 105 = 2835$.

Câu 138: Có tất cả bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số $\overline{abc}$ sao cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác cân.

Lời giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $a = b \Rightarrow c < 2a$.

TH 1: $a = b = 1 \Rightarrow c < 2 \Rightarrow c = 1$.

TH 2: $a = b = 2 \Rightarrow c < 4 \Rightarrow c \in \{1; 2; 3\}$.

TH 3: $a = b = 3 \Rightarrow c < 6 \Rightarrow c \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

TH 4: $a = b = 4 \Rightarrow c < 8 \Rightarrow c \in \{1; 2; 3; 4; 5; \dots; 7\}$.

TH 5: $a = b \in \{5; 6; 7; 8; 9\} \Rightarrow c \in \{1; 2; 3; \dots; 9\}$.

Do đó có tất cả $1 + 3 + 5 + 7 + 9 \cdot 5 = 61$ bộ số thỏa mãn bài toán trong đó có 9 bộ số là độ dài ba cạnh của một tam giác đều và 52 bộ số là độ dài của ba cạnh tam giác cân không đều.

Với mỗi bộ ba số a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác cân, ta có 3 cách sắp xếp để tạo thành một số có ba chữ số.

Vậy số các số cần tìm là: $9 + 52 \cdot 3 = 165$.

Câu 139: Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số mà tổng các chữ số trong mỗi số là 3.

Lời giải

Tổng 5 chữ số bằng 3 thì tập hợp các số đó có thể là $\{0, 1, 2\}, \{1, 1, 1\}, \{3, 0\}$.

TH1: số có 5 chữ số gồm 3 chữ số 0, 1 chữ số 1 và 1 chữ số 2:

Chọn chữ số xếp vào vị trí đầu có 2 cách, xếp chữ số còn lại vào 4 vị trí cuối có 4 cách nên có: $2 \cdot 4 = 8$

TH2: số có 5 chữ số gồm 3 chữ số 1, 2 chữ số 0 có 6 số.

Xếp số 1 vào vị trí đầu có 1 cách, 2 số 1 còn lại vào 4 vị trí cuối có C_4^2 cách nên có: $C_4^2 = 6$

TH3: số có 5 chữ số gồm 1 chữ số 3, 4 chữ số 0 có 1 số.

Vậy có $8 + 6 + 1 = 15$ số thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 140: Một hộp đựng 20 viên bi khác nhau được đánh số từ 1 đến 20. Lấy ba viên bi từ hộp trên rồi cộng số ghi trên đó lại. Hỏi có bao nhiêu cách lấy để kết quả thu được là một số chia hết cho 3?

Lời giải

20 viên bi khác nhau được đánh số từ 1 đến 20, chia làm ba phần:

Phần 1 gồm các viên bi mang số chia hết cho 3, có 6 viên.

Phần 2 gồm các viên bi mang số chia cho 3 dư 1, có 7 viên.

Phần 3 gồm các viên bi mang số chia cho 3 dư 2, có 7 viên.

Lấy ba viên bi từ hộp trên rồi cộng số ghi trên đó lại, được một số chia hết cho 3 có các trường hợp sau:

Trường hợp 1: lấy được 3 viên bi ở phần 1, có C_6^3 cách.

Trường hợp 2: lấy được 3 viên bi ở phần 2, có C_7^3 cách.

Trường hợp 3: lấy được 3 viên bi ở phần 3, có C_7^3 cách.

Trường hợp 4: lấy được 1 viên bi ở phần 1, 1 viên bi ở phần 2 và 1 viên bi ở phần 3, có $C_6^1.C_7^1.C_7^1$ cách.

Vậy có $C_6^3 + C_7^3 + C_7^3 + C_6^1.C_7^1.C_7^1 = 384$ cách lấy được ba viên bi thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 141: Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Có bao nhiêu số gồm 4 chữ số được chọn từ tập A và chia hết cho 6.

Lời giải

Gọi A là biến cố “chọn được số có 4 chữ số chia hết cho 6”

Số được chọn có dạng $\overline{abcd}$.

Số được chọn chia hết cho 6 $\Leftrightarrow$ nó chia hết cho 2 và 3, nên $d \in \{2; 4; 6; 8\} \Rightarrow$ có 4 cách chọn d

Ta thấy $\overline{abcd}$ chia hết cho 3 $\Leftrightarrow$ phải chia hết cho 3, xét các trường hợp xảy ra

TH1: Nếu $a+b+d$ chia hết cho 3 thì c chia hết cho 3 nên $c \in \{3, 6, 9\}$, c có 3 cách chọn.

TH2: Nếu $a+b+d$ chia cho 3 dư 1 thì c chia 3 dư 2, nên $c \in \{2, 5, 8\}$, c có 3 cách chọn

TH3: Nếu $a+b+d$ chia cho 3 dư 2 thì c chia 3 dư 1, nên $c \in \{1, 4, 7\}$, c có 3 cách chọn

Trong mọi trường hợp thì c luôn có 3 cách chọn; a và b có 9 cách chọn; d có 4 cách chọn.

Vậy: $n(A) = 4.3.9.9 = 972$ số.

Câu 142: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu số tự nhiên, mỗi số gồm sáu chữ số đôi một khác nhau sao cho tổng của ba chữ số đầu và tổng của ba chữ số cuối hơn kém nhau một đơn vị?

Lời giải

Gọi số cần lập có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$; $a_i \neq a_j; i \neq j; i, j = \overline{1, 6}; a_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Đặt $x = a_1 + a_2 + a_3; y = a_4 + a_5 + a_6$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x + y = 21 \\ |x - y| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 21 \\ \begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10; y = 11 \\ x = 11; y = 10 \end{cases}$$

Trường hợp 1: $\begin{cases} x = 10 \\ y = 11 \end{cases} \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 = 10$, khi đó $(a_1; a_2; a_3) \in \{(1; 3; 6), (2; 3; 5), (1; 4; 5)\}$ và 3 vị trí sau xếp 3 chữ số còn lại trừ $(a_1; a_2; a_3)$.

Vậy có $3.3!.3!=108$ số.

Trường hợp 2: Tương tự Trường hợp 1, chỉ đảo vị trí đầu và cuối.

Vậy có tất cả $2.108=216$ số.

BÀI TOÁN ĐẾM BẰNG CHIA KẸO EULER

Bài toán cơ bản:

Bài toán chia kẹo Euler là một bài toán tổ hợp xuất hiện từ thời xa xưa, đây là một bài toán rất hay và có nhiều ứng dụng trong Toán học. Xuất phát từ một vấn đề rất đơn giản, nhà bác học Leonhard Euler đã phát biểu nó thành một bài toán như sau:

"Có m chiếc kẹo giống nhau, cần chia chúng cho n em bé. Hỏi có bao nhiêu cách chia kẹo như vậy?"

Phương pháp giải bài toán cơ bản

Nếu gọi số kẹo mà mỗi em bé nhận được lần lượt là $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($0 \leq x_i \leq m; \forall i: 1 \leq i \leq n$).

Bài toán khi đó sẽ trở thành: Đếm số nghiệm nguyên không âm của phương trình:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$$

coi rằng giữa mỗi em bé có một số 0 và số kẹo của em bé thứ i nhận được sẽ biểu diễn bằng một dãy gồm x_i số 1, thì bài toán trở thành đếm số cấu hình có dạng:

$$\underset{x_1}{11} \underset{x_2}{1011} \dots 10 \dots \underset{x_n}{011} \dots 1$$

Với m số 1 và $n-1$ số 0

Như vậy, thực tế ta đang đếm số cách đặt $n-1$ số 0 vào một dãy gồm $m+n-1$ vị trí, còn lại sẽ là các số 1. Theo quy tắc tổ hợp không lặp, số nghiệm của bài toán sẽ là: C_{m+n-1}^{n-1}

Câu 143: Thầy giáo muốn chia một hộp bút bi gồm 12 chiếc giống hệt nhau cho 10 học sinh sao cho mỗi bạn có ít nhất 1 chiếc. Hỏi thầy có bao nhiêu cách chia?

Lời giải

Cách 1: Áp dụng phương pháp chia kẹo Euler: Số cách chia $C_{11}^9 = 55$ cách.

Cách 2: TH1: Trong 10 bạn có 1 bạn được 3 bút, các bạn còn lại mỗi ng 1 bút: có 10 cách chia

TH2: có 2 bạn mỗi ng hai bút, các bạn còn lại mỗi ng 1 bút: có $C_{10}^2 = 45$ cách chia.

Vậy có tất cả 55 cách chia.

Nhận xét: cách 2 chỉ dùng được khi số lượng vật được chia chênh lệch so với số phần chia ra rất nhỏ.

Câu 144: Bé Nam có 10 viên bi màu xanh, 8 viên đỏ và 8 viên vàng; các viên bi cùng màu giống hệt nhau. Bé muốn chọn ra 10 viên đồng thời mỗi màu nhiều nhất 5 viên để tặng bé An. Hỏi bé có bao nhiêu cách chọn.

Lời giải

Gọi số bi màu xanh, đỏ vàng bé Nam chọn ra tương ứng là

$$x, y, z: \begin{cases} x + y + z = 10 \\ x \leq 5, y \leq 5, z \leq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (6-x) + (6-y) + (6-z) = 8 \\ 6-x \geq 1; 6-y \geq 1; 6-z \geq 1 \end{cases}.$$

Vậy số cách chọn là $C_7^2 = 21$ cách.

Câu 145: Siêu thị còn 10 chai nước rửa bát giống hệt nhau được bán giảm giá, có 5 khách hàng ở quầy nước rửa bát đang định mua hàng. Hỏi siêu thị có tất cả bao nhiêu cách bán 10 chai nước rửa bát cho 5 vị khách đó.

Lời giải

Số chai nước rửa bát bán cho mỗi vị khách lần lượt là $x_i, i = \overline{1, 5}$. Khi đó mỗi bộ $(x_i)_{i=\overline{1, 5}}$ là một nghiệm không âm của bất phương trình $x_1 + x_2 + \dots + x_5 \leq 10$.

Bất phương trình đưa về dạng tìm số nghiệm không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + \dots + x_5 + m = 10$$

Đáp số C_{15}^5 cách.

Câu 146: Có bao nhiêu cách phân phối 2023 quyển sách toán giống hệt nhau cho 100 cửa hàng bán sách sao cho mỗi cửa hàng nhận được ít nhất một cuốn sách?

Lời giải

Gọi $x_1, x_2, \dots, x_{100}$ ($x_1, x_2, \dots, x_{100} \in \mathbb{N}^*$) lần lượt là số sách mà mỗi cửa hàng nhận được.

Ta có $x_1 + x_2 + \dots + x_{100} = 2023$.

Viết dãy $\underbrace{11 \dots 11}_{2023 \text{ số}}$. Ta thấy, với mỗi cách điền chín mươi chín số 0 vào dãy trên ta được một bộ nghiệm nguyên dương của phương trình.

Do đó, có C_{2022}^{99} cách điền chín mươi chín số 0 ứng với C_{2022}^{99} nghiệm nguyên dương của phương trình đã cho.

Vậy có C_{2022}^{99} cách chia sao cho mỗi cửa hàng nhận được ít nhất một cuốn sách.

Câu 147: Có n vật giống hệt nhau và m hộp phân biệt ($n \geq m, n, m \in \mathbb{N}^*$).

a) Hỏi có bao nhiêu cách phân phối hết n vật đó vào m hộp đã cho?

b) Hỏi có bao nhiêu cách phân phối hết n vật đó vào m hộp đã cho sao cho mỗi hộp có ít nhất một vật?

Lời giải

Đánh số các hộp theo thứ tự từ 1 đến m . Giả sử ta đã phân phối hết n vật vào m hộp đã cho.

Gọi x_i là số vật được phân phối cho hộp thứ i , với $i = \overline{1, m}$.

a) Số cách phân phối thỏa mãn bằng số nghiệm nguyên không âm của PT $x_1 + x_2 + \dots + x_m = n$ và bằng C_{m+n-1}^{m-1} .

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_m = n \\ x_i \geq 1, \forall i = \overline{1, m}. \end{cases}$$

Câu 148: Cho một nhóm có 5 cô gái, kí hiệu là $G_1, G_2, \dots, G_5$ và 12 chàng trai được xếp vào 17 chiếc ghế được sắp thành một hàng ngang sao cho các điều kiện sau đồng thời thỏa mãn:

- Có tất cả bao nhiêu cách xếp như vậy?

Gọi x_1 là số các chàng trai ngồi bên ngoài G_1 , x_2 là số các chàng trai ngồi giữa G_1 và G_2 , x_5 là số các chàng trai ngồi giữa G_4 và G_5 , x_6 là số các chàng trai ngồi ngoài G_5 . Theo bài ra ta

có $\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 12 \\ x_2 \geq 3 \\ 1 \leq x_5 \leq 4 \end{cases}$.

Đặt $a = x_1 + 1; b = x_2 - 2; c = x_3 + 1; d = x_4 + 1; e = x_6 + 1$

Suy ra ta tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình
$$\begin{cases} a+b+c+d+e+x_5=14 \\ 1 \leq x_5 \leq 4 \end{cases}.$$

Ta có số nghiệm của hệ trên là $C_{12}^4 + C_{11}^4 + C_{10}^4 + C_9^4 = 1161$. Vì các chàng trai có thể đổi chỗ cho nhau nên số cách xếp là $12!1161$ cách.

Câu 149: Có bao nhiêu cách xếp 30 viên bi giống nhau vào 5 chiếc hộp khác nhau sao cho: Hộp 1 có ít nhất 5 viên bi; hộp 2 và hộp 3 có không quá 6 viên bi.

Số cách phân phối thỏa mãn bằng số cách phân phối 25 viên bi cho 5 hộp và thỏa mãn điều kiện hộp 2 và 3 đều có số bi nhỏ hơn hoặc bằng 6.

+ Số cách phân phối 25 viên bi cho 5 hộp là: $C_{29}^4 = 23751$.

+ Số cách phân phối 25 viên bi cho 5 hộp sao cho hộp 2 chứa số bi lớn hơn hoặc bằng 7 là: C_{22}^4

Tương tự: Số cách phân phối 25 viên bi cho 5 hộp sao cho hộp 3 chứa số bi lớn hơn hoặc bằng 7 là: C_{22}^4 .

Số cách phân phối 25 viên bi cho 5 hộp sao cho cả hộp 2 và 3 chứa số bi lớn hơn hoặc bằng 7 là: C_{15}^4 .

Do đó, số cách phân phối thỏa mãn điều kiện là: $C_{29}^4 - [2C_{22}^2 - C_{15}^4] = 10486$.

Câu 150: Cho đa giác đều 10 cạnh nội tiếp trong đường tròn tâm O . Có bao nhiêu tam giác mà các đỉnh là 3 đỉnh của đa giác và 3 cạnh là 3 đường chéo của đa giác?

Lời giải

Gọi số đo mỗi cung chứa một cạnh của đa giác đều là 1 đơn vị

Xét một tam giác thỏa yêu cầu bài toán, với mỗi đỉnh gọi số đo 3 cung chứa 3 cạnh của nó là x, y, z thì ta có $x, y, z \geq 2$ và $x + y + z = 10$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y - 1 \\ z' = z - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x', y', z' \geq 1 \\ x' + y' + z' = 7 \end{cases}$$

Phương trình $x' + y' + z' = 7$ có $C_6^2 = 15$ nghiệm nguyên dương.

Thực hiện cho 10 đỉnh nhưng mỗi tam giác được đếm 3 lần ứng với 3 đỉnh của nó.

Vậy số tam giác thỏa yêu cầu bài toán là: $\frac{10}{3} \cdot 15 = 50$ tam giác.

Câu 151: Cho đa giác đều $A_1 A_2 \dots A_{2n}$ nội tiếp trong đường tròn tâm O . Biết rằng số tam giác có đỉnh là 3 trong $2n$ điểm $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$ gấp 20 lần so với số hình chữ nhật có đỉnh là 4 trong $2n$ điểm $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$. Tìm n ?

Lời giải

Số tam giác có các đỉnh là 3 trong $2n$ điểm $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$ là: C_{2n}^3 .

Ta thấy ứng với hai đường chéo đi qua tâm O của đa giác $A_1 A_2 \dots A_{2n}$ cho tương ứng một hình chữ nhật có 4 đỉnh là 4 điểm trong $2n$ điểm $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$ và ngược lại mỗi hình chữ nhật như vậy sẽ cho tương ứng hai đường chéo đi qua tâm O của đa giác. Mà số đường chéo đi qua tâm của đa giác là n nên số hình chữ nhật có đỉnh là 4 trong $2n$ điểm bằng C_n^2 .

$$\text{Theo giả thiết: } C_{2n}^3 = 20C_n^2 \Leftrightarrow \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{3!} = 20 \frac{n(n-1)}{2} \Leftrightarrow n = 8.$$

Câu 152: Cho đa giác đều có 2023 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm O . Tìm số tam giác có 3 đỉnh là 3 đỉnh của đa giác đó nhưng không có cạnh nào là cạnh của đa giác đã cho.

Lời giải

Số tam giác có 3 đỉnh là 3 đỉnh của đa giác là C_{2023}^3 tam giác.

+ **TH1:** Số tam giác có 2 cạnh là 2 cạnh của đa giác đã cho bằng số cách chọn ra 3 đỉnh liên tiếp của đa giác 2023 cạnh $\Rightarrow$ Có 2023 tam giác có 2 cạnh là 2 cạnh của đa giác đã cho.

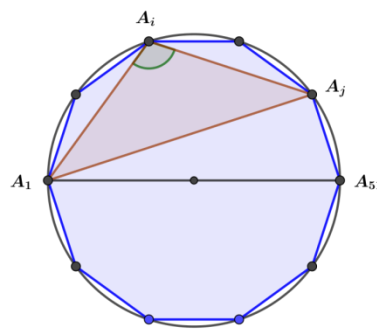
Vậy có $C_{2023}^3 - 2023 - 4084437 = 1373732311$ tam giác thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Lời giải

Do đó tổng số tam giác thỏa mãn đề bài là $10.C_n^2 + nC_{10}^2$ tam giác.

$$\Leftrightarrow 5n(n-1)+45n-33540=0 \Leftrightarrow 5n^2+40n-33540=0 \Leftrightarrow \begin{cases} n=78 & (\text{thỏa mãn}) \\ n=-86 & (\text{loại}) \end{cases}.$$

Lời giải



Chọn nửa đường tròn có 2 cách.

Chọn 2 đỉnh A_i, A_j có C_{49}^2 cách.

Giả sử tam giác $A_i A_j A_k$ là tam giác tù tại A_i thế thì tam giác $A_j A_i A_k$ cũng được đếm thêm 1 lần vào số các tam giác tù kể trên. Tuy nhiên hai tam giác này chỉ là một, vậy ta đã đếm lặp hai lần.

Tóm lại số tam giác tù có thể lập được là $\frac{100.2.C_{49}^2}{2} = 117600$.

Câu 155: Trong mặt phẳng cho 3 điểm phân biệt A, B, C . Từ A dựng m đường thẳng, từ B dựng n đường thẳng, từ C dựng p đường thẳng. Trong số các đường thẳng vừa dựng không có 3 đường thẳng nào đồng qui và không có cặp đường thẳng nào song song. Tìm số các tam giác tạo bởi các đường thẳng dựng từ 3 điểm A, B, C , trừ ba điểm A, B, C .

Lời giải

Số các giao điểm nằm trên 1 đường thẳng kẻ từ A là $n + p$.

Số các giao điểm nằm trên 1 đường thẳng kẻ từ B là $m + p$.

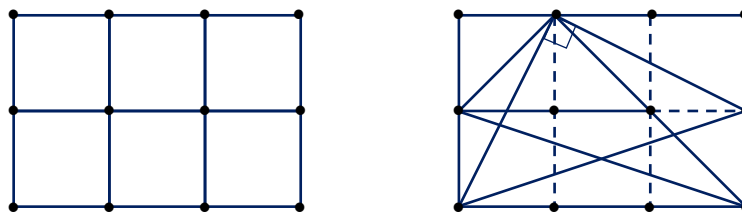
Số các giao điểm nằm trên 1 đường thẳng kẻ từ C là $m + n$.

Suy ra tổng tất cả các giao điểm là $\frac{1}{2}[m(n+p) + n(m+p) + p(m+n)] = mn + np + mp$.

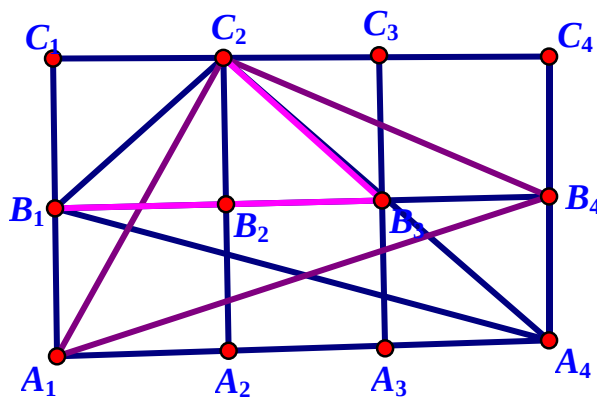
Một bộ ba giao điểm không thẳng hàng sẽ tạo thành 1 tam giác.

Vậy số tam giác được tạo ra là $C_{mn+np+mp}^3 - mC_{n+p}^3 - nC_{m+p}^3 - pC_{m+n}^3$.

Câu 156: Hình vẽ bên trái dưới đây là một lưới ô vuông kích thước 3×2 có 12 nút lưới. Từ 12 nút lưới có thể chọn 3 nút làm 3 đỉnh của một tam giác vuông. Hình vẽ bên phải minh họa một số loại tam giác vuông. Hỏi có bao nhiêu tam giác vuông có 3 đỉnh được lấy từ 12 nút lưới ô vuông.



Lời giải



* TH1: Các tam giác vuông có 2 cạnh góc vuông chứa cạnh của hình vuông đơn vị.

Có $C_3^2.C_4^2 = 18$ hình chữ nhật. Suy ra có $18.4 = 72$ tam giác vuông.

+ TH2.1: Tam giác vuông tại $A_2, A_3, C_2, C_3 \Rightarrow$ có $4.3=12$ tam giác.

+ TH2.2: Tam giác vuông tại $B_1, B_1 \Rightarrow$ có 2 tam giác.

+ TH2.3: Tam giác vuông tại B_1 , $B_2 \Rightarrow$ có $4.2+1+1=10$ tam giác.

Vậy có tổng số tam giác vuông $72+12+2+10=96$.

Lời giải

+ Số tam giác tạo bởi 8 đường thẳng từ A và các đoạn thẳng trên cạnh BC là số cách chọn 2 đường thẳng từ 8 đường thẳng xuất phát từ A .

Suy ra có: $C_8^2 = 28$ tam giác dạng này.

+ Số tam giác tạo bởi 8 đường thẳng từ A và các đoạn thẳng trên cạnh BM là số cách chọn 2 đường thẳng từ 8 đường thẳng xuất phát từ A .

Suy ra có: $C_8^2 = 28$ tam giác dạng này.

+ Số tam giác tạo bởi 7 đường thẳng từ A và các đoạn thẳng trên cạnh BC , BM là số cách chọn 1 đường thẳng từ 7 đường thẳng xuất phát từ A .

Suy ra có: $C_7^1 = 7$ tam giác dạng này.

Vậy tất cả có: $28+28+7=63$ tam giác được tạo thành.